Instituto Alberto Luiz Coimbra de
Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia
COPPE
UFRJ

CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS SOBRE OS MODELOS DE HIERARQUIA LOCALIZACIONAL USANDO LÓGICA E MATEMÁTICA FUZZY

Giovanni Massimo Maria Rossi

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Produção.

Orientador: Carlos Alberto Nunes Cosenza

Rio de Janeiro
Abril de 2013

CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS SOBRE OS MODELOS DE HIERARQUIA LOCALIZACIONAL USANDO LÓGICA E MATEMÁTICA FUZZY

Giovanni Massimo Maria Rossi

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO.

Examinada por:

____
Prof. Carlos Alberto Nunes Cosenza, D.Sc.

____
Prof. Francisco Antonio de Moraes Accioli Doria, D.Sc.

____
Prof. Mário Cesar Rodriguez Vidal, D.Sc.

____
Prof. Ricardo Silva Kubrusly, D.Sc.

____
Prof. Marcelo Silva e Santos, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

ABRIL DE 2013

Rossi, Giovanni Massimo Maria

Considerações Adicionais sobre os Modelos de Hierarquia Localizacional Usando Lógica e Matemática Fuzzy/ Giovanni Massimo Maria Rossi. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2013.

IX, 94 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Carlos Alberto Nunes Cosenza

Tese – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia de Produção, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 91 - 94.

1. Lógica Fuzzy. 2. Modelo Cosenza. I. Cosenza, Carlos Alberto Nunes. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Produção. III. Título.

Dedico este trabalho à minha família, sempre disposta a superar desafios, a honrar compromissos e, com muita paciência e dedicação, auxiliar e aguardar a finalização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus.

Ao amigo e orientador professor Cosenza.

Ao Programa e às secretarias que participam da elaboração e divulgação da documentação.

Ao CNPq pela bolsa de Doutorado.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS SOBRE OS MODELOS DE HIERARQUIA LOCALIZACIONAL USANDO LÓGICA E MATEMÁTICA FUZZY

Giovanni Massimo Maria Rossi

Abril /2013

Orientador: Carlos Alberto Nunes Cosenza

Programa: Engenharia de Produção

O processo decisório é sempre um fator complexo e de múltiplas variáveis que precisam ser consideradas para que uma decisão importante seja tomada para a solução de problemas. É sabido que a tomada de decisão nem sempre é feita com todas as variáveis necessárias consideradas e que situações adversas podem ocorrer. Depende de fatores muitas vezes externos que por algumas vezes podem parecer até contraditórios. A matemática e a lógica fuzzy parecem ser as ferramentas ideais no auxílio desta tomada de decisão por parte dos gestores.

Esta pesquisa procura levantar o referencial teórico, a matemática e a lógica fuzzy, juntamente com os modelos de localizações industriais para identificar e analisar e decidir, levantando com o menor erro possível quais as decisões estratégicas que esses gestores precisam tomar para definir as localizações de seus empreendimentos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

ADDITIONAL CONSIDERATIONS ON THE MODELS OF HIERARCHY LOCATIONAL USING FUZZY LOGIC AND MATHEMATICS

Giovanni Massimo M. Rossi

April/2013

Advisor: Carlos Alberto Nunes Cosenza

Department: Production Engineering

Decision making is always a complex factor and multiple variables that need to be considered so that an important decision is taken to solve problems. It is known that decision making is not always done with all the necessary variables considered and adverse situations that may occur. Often depends on external factors which can sometimes even seem contradictory. Math and fuzzy logic seem to be the ideal tools to aid in this decision making by managers.

This research seeks to raise the theoretical, math and fuzzy logic, along with models of industrial locations to identify and analyze and decide, posing with the lowest possible error which strategic decisions that managers need to take these to define the locations of their projects.

ÍNDICE

1 - INTRODUÇÃO

O tema desenvolvido neste trabalho foi motivado por três problemas fundamentais: fundamentos teóricos da localização industrial, destacando os seus pioneiros, cujo conhecimento científico e filosófico permitiram estruturar metodologias que aparentemente simples, incorporavam fundamentos empíricos com grande consistência metodológica que se prestavam a ricas formulações, em seguida se discorre sobre os fundamentos básicos da lógica e da matemática fuzzy, hoje incorporadas em mais de 30% dos artigos científicos de base matemática, de diferentes áreas da ciência. As dificuldades em incorporar a maioria das variáveis na estruturação da modelagem clássica, que tem no *ceteris paribus* suas excusas, foram bastante minimizadas pela introdução da lógica fuzzy.

A alta precisão dos modelos clássicos, ou *crisp*, se dava em detrimento da verdadeira realidade ou de sua maior proximidade, o que parece justificar os atuais modelos matemáticos de hierarquia locacional fortemente apoiados pela fuzzy. Um modelo desenvolvido pela COPPE permitiu que fossem rigorosamente hierarquizados 1789 municípios para localização de usinas de biocombustível, discorreu-se posteriormente sobre três modelos que se estruturaram sob esta lógica:

O MASTERLI, desenvolvido pela equipe de pesquisadores da SOMEA (Sociedade de Matemática e Economia da Itália) que fizeram pesquisas em várias regiões da Europa. Trata-se de um grupo pertencente a METRA Internacional e a SEMA francesa.

Técnicos da COPPE tiveram a oportunidade de trabalhar com essa equipe que introduziu uma nova filosofia nos estudos locacionais. A partir daí todos os modelos matemáticos de hierarquia rigorosa incorporavam a filosofia do MASTERLI, com estruturas matemáticas mais abrangentes e matrizes super abstratas. Finaliza-se o estudos com a análise do Método Fuzzy de Decisão multi-critério de localização, de Liang e Wang, que propuseram um algoritmo para a seleção de sítios com base na teoria dos conjuntos fuzzy. Liang e Wang evoluíram fazendo analogia com algoritmos de Chen. Estes desenvolvidos de modo elegante e consistente nas hipóteses e em suas comprovações por etapas. As comprovações por etapas mostram a riqueza de um raciocínio modelar.

Portanto, o presente trabalho tem como um dos objetivos o processo de evolução de teorias e inferir sobre suas aplicações, reunindo elementos que se achavam dispersos e desconectados.

2 – OBJETIVOS, RELEVÂNCIA E DELIMITAÇÃO DA PESQUISA

2.1 – Objetivo

O objetivo principal deste trabalho é confrontar três modelos de hierarquia locacional citados na literatura internacional e muitas vezes usados de maneira inadequada por não se ter ideia de suas adequações a uma realidade específica. O que é comum acontecer quando se usa estrutura matemática inadequada para a solução de um problema que a ele não se adéqua. Considerou-se importante identificar os pioneiros da localização numa sequência histórica, situando-os no tempo em que as vivências da época influenciavam e justificavam teorias científicas e filosofias, com as limitações dos conhecimentos matemáticos da época. Isso foi deveras importante pelas marcas que deixaram nas concepções atuais dos modelos superabstratos. Finalmente objetivava-se também mostrar aos pesquisadores que o confronto entre os espaços matemáticos de requerimentos e espaços onde os elementos têm concreta existência, em suas dimensões e disponibilidades, devem sofrer interferências necessárias em função dos problemas que se pretende resolver. O uso de aplicativos, por exemplo, mostra a ausência de um raciocínio modelar.

2.2 - Justificativa

Sem dúvidas ficou clara a justificativa deste trabalho na sua introdução. Vem de discusões em seminários de curso onde sempre se explicitava a necessidade de confrontos entre os modelos e suas estruturas matemáticas. As métricas euclídeas e a métrica de X2 de Bezencry, largamente utilizadas não se prestavam, na maioria dos casos a aplicações onde matrizes superabstratas retravam melhor a complexidade do sistema. Todos esses elementos sob consideração estão contidos nas sentenças matemáticas e na disposição dos elementos nas diferentes matrizes.

São considerações que se justificam pelos questionamentos em um específico ambiente acadêmico.

3 - REFERENCIAL TEÓRICO

Introdução

Para o presente trabalho, o encaminhamento que se segue neste capítulo abre amplamente o referencial teórico; onde são mostrados os modelos clássicos de localização, destacando os pesquisadores e cientistas pioneiros. No capítulo seguinte faz-se uma introdução lógica e a matemática *fuzzy* como o mais moderno instrumento de organização metodológica e de interferência científica.

3.1 - Percussores das Teorias de Localização Industrial

Teorias de localização industrial começaram a surgir anteriormente à primeira Revolução Industrial que ocorreu na Inglaterra, no final do século XVIII início do século XIX, quando as indústrias se tornaram fatores de estudo mais aprofundados por parte de pesquisadores, engenheiros, economistas e outras interessados no tema, aproximadamente no início do século XVII. Sua análise estava voltada principalmente para fatores de custo, pois diferentes localizações representam diferentes respostas que a indústria recebe.

Fatores estes que englobam, porém, muito mais do que custos, mas interferem também na qualidade do produto, no meio ambiente, mercado, concorrência, empregos, desenvolvimento de cidades, sustentabilidade entre outros pontos também importantes.

Vários autores que iniciaram as pesquisas e foram os percussores começaram a surgir desde o século XIX como Joachim Von Thünen, um dos principais teóricos, que segundo suas pesquisas se baseavam no mercado e no custo da terra, onde ele dizia que "*a valorização da terra era inversamente proporcional a sua distância do mercado*". Analisando a infraestrutura e conhecimento disponível da época, realmente é uma afirmativa consistente, pois não haviam estradas nem meios suficientes para "absorver" as distâncias de forma satisfatória.

Nos dias de hoje, muita coisa mudou, as estradas se multiplicaram e ficaram cada vez melhores, assim como as ferrovias, os portos e os aeroportos e as novas tecnologias como meio e suporte. Os veículos mais modernos e sofisticados, contam com tecnologias avançadas e a informática que apareceu apenas no século XX, assim como a internet, GPS e etc. Mega navios aliados aos portos muito maiores e modernos controlados por *software,* que cuida da logística de recebimento, envio de mercadorias e do carregamento destes navios, que suportam cada vez mais um maior volume de produtos.

Vários estudos que impulsionaram as teorias de localização industrial e dos fatores que agem nessas condições, foram ordenadas cronologicamente (pesquisa de autores como: GERTNER, 2000, PERREUX, 1998, CLEMENTE, 1994) são:

1601(a 1665) – FERMAT: A mais antiga formulação dos problemas de localização industrial, com três pontos num plano, Fermat dizia que encontrando um quarto ponto, este seria o que minimizaria as distâncias entre os três escolhidos;

1608 (a 1647) – TORRICELLI: também é descrito com várias soluções;

1755 - CANTILLON, Richard: precursor da economia espacial;

1842 – MARSHALL (economista): não considerava de forma completa os efeitos da influencia do espaço no equilíbrio econômico, pensamento compartilhado pelos economistas da época segundo a Escola Clássica Alemã (HADDAD, 1989);

1842 – VON THÜHEN, Johann Henrich: originalmente é um modelo para explicar a localização da atividade agrícola, e afirmava que a valorização da terra era inversamente proporcional à sua distância com o mercado, posteriormente, serviu de base para o inicio dos estudos sobre localização industrial, onde a distância do mercado é o principal fator relacionado com a localização, foi proposto no início do século XIX;

1872 – LAUNHARDT: começou com a publicação de trabalhos sobre custos da infraestrutura, planejamento de rotas e preços; abordou problemas de localização industrial e dos nós das redes de comunicação. (inversamente à generalização de Weber). Esses problemas incluíram a procura do lugar ótimo destes nós, conectando-os aos pontos de interesse;

1909 – WEBER, Alfred: enriqueceu os problemas de localização industrial ao introduzir "pesos" nas necessidades de instalação, formulou a Teoria Weberiana da localização industrial; onde são considerados três fatores fundamentais para a decisão de localização das indústrias: 1) proximidade com o mercado consumidor e com as fontes de matéria prima; 2) custo da mão de obra e 3) uma combinação de forças de aglomeração de desaglomeração.

Sob a ótica da Teoria Weberiana, o fator locacional pode ser entendido como uma vantagem ou ganho, no sentido de uma redução de custos, conseguida por uma empresa ao decidir pela sua localização em determinado lugar; devido à importância de seus trabalhos, São feitas à frente algumas outras observações importantes sobre o trabalho de Weber;

1925 – PREDÖHL, Andreas: pela aplicação do princípio da substituição;

1929 - HOTELLING: contribuições sobre a localização das firmas no espaço econômico, considerando a situação de monopólio;

1935 – PALANDER; **Tord**: pela generalização do método das isolinhas, que está na base das curvas de indiferença;

1936 - LÖSCH, August; o modelo de LÖSCH pode ser considerado um modelo orientado ao lucro, onde os custos fixos também ocupam um lugar especial. Embora considere o custo de transporte como um elemento na determinação da aglomeração, o modelo de LÖSCH agrega ao processo de decisão as economias de escala obtidas na produção. Desta forma, a maior ou menor vantagem se refere ao maior ou menor predomínio de um destes elementos sobre o outro. (CLEMENTE, 1994);

1937 – WEISFELD: Elaborou uma solução prática, logo negligenciada (possivelmente pelo tipo do jornal em que foi publicada, cujo método era muito complexo sem o auxílio de computadores). Foi posteriormente redescoberta por MIEHLE (1958), KUHN E KUENNE (1962) e COOPER (1963);

1955 - Hoover: além do local, o atendimento a uma maior diversidade de mercados, pode tornar uma empresa mais competitiva, se admitirmos a existência de rendimentos crescentes de escala;

1956 – ISARD: Seu modelo é uma complementação do modelo de Weber, uma vez que tem como principal fator explicativo para a localização a distância. Em síntese, o modelo explica que existiria um novo fator de produção, que ele denomina de insumo de transporte. O custo deste insumo seria determinado pela estrutura competitiva e por fatores conjunturais locais. A quantidade necessária deste insumo, por outro lado, seria dependente do padrão tecnológico e pela eficiência dos meios de transporte (CLEMENTE, 1994). ISARD também segmentou os fatores em 3 grupos:

- Custos do transporte (em função da distância percorrida);
- Custos de operação (mão de obra, energia, água, impostos, etc.);
- Custos relativos à magnitude das atividades de negócio em determinada região (efeitos das economias de aglomeração – tendem a agrupar as atividades produtivas em um ponto (LEME, 1982) e desaglomeração – tendem a separar as atividades produtivas em vários pontos (LEME, 1982)).

1958 – MIEHLE: redescobriu a solução de WEISFELD, de 1937;

1960 – ISARD: Coeficiente de Localização, O Coeficiente de Redistribuição, a Curva de Localização (em tudo análoga à Curva de Lorenz), o Coeficiente de Especialização e o Coeficiente de Reestruturação, com utilização menos comum em estudos aplicados de análise regional no Brasil. (HADDAD, 2005).

1962 - KUHN E KUENNE: redescoberta da solução de WEISFELD (1937);

1963 – COOPER: outro que redescobriu a solução de WEISFELD (1937);

1966 - CHRISTALLER, Walter: um dos primeiros a estudar os sistemas urbanos;

1967 – KUHN (PERREUR, 1974 – LATEC, Universidade de Borgonha): deu um breve histórico de soluções para problema de localização;

1972 - SALOMON: A questão decisória central em relação a localização refere-se aos custos totais de transporte (insumos e produtos acabados), e destaca que no local do projeto a análise de custo total em contraposição à expectativas de receita (ROMANI E SALVATO, UFSC);

1975 – HOLANDA: a localização ótima é aquela que assegura a maior diferença entre custos e benefícios, privados ou sociais. A melhor localização é a que permite obter a mais alta taxa de rentabilidade (critério provado) ou o custo unitário mínimo (critério social). (ROMANI E SALVATO, UFSC);

1978 – CACCIAROLO: fatores econômicos são diretamente relacionados com o lucro a ser obtido pela empresa. Fatores não econômicos estão relacionados a outras funções como: preferências por um determinado estilo de vida, clima, etc..;

1978 – MELNICK: além do aspecto financeiro, o caráter social do projeto também é importante. E além da escolha mais adequada ser orientada com os objetivos do tamanho ótimo, para investimento privado, à taxa mínima de lucro e custo unitário mínimo, considerando-se ainda, o problema sob o ponto de vista social. (ROMANI E SALVATO, UFSC);

1985 – WOILER: A localização industrial tem natureza essencialmente dinâmica sendo que ao longo do tempo pode ser conveniente modificar ou tomar certas atitudes estratégicas: expandir o que existe e/ou subcontratar; reter a fábrica atual e implantar outra; relocalizar a fábrica atual. É preciso ainda estar atento às modificações técnicas e mercadológicas que, ao longo da existência da empresa, podem indicar a conveniência de rever a localização geográfica, sendo que o processo de localizar uma planta industrial em termos estratégicos e de decisão não se restringe apenas ao projeto inicial de implementação (ROMANI E SALVATO, UFSC).

1987 – MAGALHÃES: Distingue o problema da localização industrial sob a ótica social e do ponto de vista privado. Um projeto bem localizado aumenta o poder de competitividade da empresa. Magalhães aborda o conceito de macro e microlocalização. Onde a macrolocalização é a determinação da região, estado ou local onde será instalado o projeto. Por outro lado a microlocalização analisa os pormenores, fixando o ponto exato que localizará a nova unidade produtiva. Destaca ainda, a existência de outras metodologias que definem a macro e microlocalização. Destacamos o método dos orçamentos comparados, que considera as diferentes alternativas fazendo um orçamento para cada uma delas e comparando as opções entre si (ROMANI E SALVATO, UFSC);

1988 – EISINGER: incentivos fiscais atuam como modificadores de uma dada configuração de fatores para a localização, ele não reconhece os incentivos fiscais como critério primário de localização, apesar de admitir que os incentivos podem alterar uma dada configuração de fatores (carga tributária, capital, folha de pagamento, etc.). Segundo o autor, é necessário que haja uma forte parceria entre setores público e privado no que diz respeito ao desenvolvimento industrial de uma região e o empenho do governo com políticas sérias de desenvolvimento econômico com o objetivo de gerar e reter empregos, consequentemente aumentando a base de impostos;

1988 – POMERANZ: A questão decisória central em relação a localização refere-se aos custos totais de transporte (insumos e produtos acabados) (ROMANI E SALVATO, UFSC);

1993 – WESOLOWSKI: analisou os pontos-chave ironisando que, quando a biblioteca de Alexandria foi destruída em 638 A.D., ela deve ter incluído entre seus

700.000 volumes, pelo menos três versões do problema de localização com soluções, uma das quais teria sido incorreta;

1994 – TOGNERI: A correta localização de plantas industriais podem trazer benefícios: melhoria dos serviços prestados, aperfeiçoamento no atendimento dos mercados regionais, melhorias nos climas de negócios, proximidade com fornecedores, etc.;

1994 – ZAX: propõe um modelo para explicar a mobilidade entre e dentro das regiões, onde a migração ocorre quando o trabalhador deixa seu mercado residencial-laboral para se realocar em outro mercado. Neste modelo são investigados os determinantes do comportamento migratório, analisando a saída do centro para a periferia ou interior. (SILVA *et al.*, 2009);

1995 – TUSELMANN: A importância de um determinado fator pode variar de indústria para indústria e na maioria das vezes, os fatores não são de fácil compreensão e nem objetivamente utilizados;

1995 – HOLTZ-EAKIN: desenvolvem um trabalho para avaliar a influência da infraestrutura sobre o acúmulo de capital público e o aumento da produtividade. Esse estudo, porém, não aponta para uma forte dependência entre as variáveis consideradas. (SILVA *et al.*, 2009);

1995 – SHEPPARD *et al.*: consideram o problema de mensuração do benefício de melhorias no sistema de transportes em áreas urbanas, a partir do valor agregado do solo. (SILVA *et al.*, 2009);

1995 – NIJKAMP: Incorpora a questão ambiental como fatores relevantes para os estudos de economia espacial, a partir de estudos recentes que interagem modelos econômicos com modelagem dinâmica de sistemas biológicos;

2000 – ARANGO: a localização poderia ser explicada pela distância a um polo de atração e pela importância deste, que funcionaria como uma analogia da massa no modelo de gravitação universal de Newton. No caso da economia espacial, este tipo de modelo dá forte ênfase à distância e ao tamanho do mercado. (SILVA *et al.*, 2009);

2001 – PORTER: linha neoclássica ortodoxa, o principal motivo da localização das empresas se trada de questões competitivas. Nesta linha tornou conhecido o que denominou de cinco forças competitivas, que explicariam a escolha da estratégia competitiva das empresas, inclusive a sua localização.

"A solução depende mais do terreno do que as condições de transporte, de modo que as condições de transporte devem ser estudados tão cuidadosamente como as características do solo" [LAUNHARDT, 1872]

3.2 - Aspectos relevantes dos estudiosos mais influentes de Localização Industrial

Os autores citados a seguir, foram os principais pensadores e cientistas que tiveram sua contribuição mais influente no segmento da localização industrial, não desprezando obviamente a importância que outros tiveram no campo da localização industrial. Para melhor visualizar as diferenças, foi acrescentada ao final, tabela comparativa entre os três cientistas mais influentes.

Conforme Weber e mais tarde por Isard, a localização industrial também pode ser explicada pela interação entre as forças de aglomeração e desaglomeração espacial, de forma que a probabilidade de localização resulta função da densidade de consumidores residenciais e da densidade comercial (tamanho do mercado) e da distância até o mesmo (SILVA, ARANGO, GUSMÃO 2004).

Segundo ainda os pressupostos da teoria Weberiana, onde ele pretende enfatizar os custos de transporte. Neste triângulo ele procura explicar que o ponto de equilíbrio das três forças é capaz de proporcionar um menor custo para a empresa, onde os custos de transporte tanto para o produto final, quanto para as matérias primas sejam idênticos por unidade de distância percorrida, sendo que a localização ideal para esta indústria será encontrada exatamente no centro deste triângulo, procurando minimizar os custos de transporte. O triângulo locacional é realizado por dois pontos diferentes de fornecimento de matérias primas para a indústria e outro ponto distinto onde se localiza o centro consumidor.

3.3 - A Teoria da Localização de Atividades Agrícolas de Von Thünen

Johann Henrich Von Thünen (1783-1850) além de dar importantes contribuições à teoria econômica foi o pioneiro a incorporar a dimensão espacial - a distância, nos modelos econômicos. Somam-se em sua formação acadêmica. a influência de Standinger - o administrador do "Agricultural College at Gloss - Flbttbeck" onde Thünen iniciou seus estudos, a de Dr.Albrecht Thaer — um dos estudiosos da questão agrícola na época, e a de Adam Smith.

A partir dos questionamentos referentes à teorias estabelecidas de produção agrícola o cientista realizou significativos estudos matemáticos associados à agricultura. Sua obra "Isolated State", constituída de três volumes (o primeiro publicado em 1826), apresenta um modelo de localizacional das atividades agrícolas, o primeiro de uma série de contribuições que viriam a ser dadas, mais tarde, à localização.

3.3.1 - A Teoria da Localização Industrial de Weber

Alfred Weber, nascido na cidade de Erfurt (Alemanha) em 1868, foi economista e sociólogo. Seu primeiro livro "Theory of the Location of Industries", publicado em 1909, foi escrito com base numa pesquisa histórica realizada na Alemanha pós 1860. Este primeiro período da Revolução Industrial se caracterizou pela ocorrência de aglomerações industriais cujos processos de formação foram estudados por Weber.

Uma importante contribuição à teoria da localização foi permitida dada a formação de Alfred Weber em sociologia. As interações, as aglomerações e desaglomerações, enfim, os fatores indiretos resultantes da natureza social da produção, pouco compatíveis com as análises dedutivas comumente usadas nos modelos econômicos, foram consideradas na Teoria da Localização Industrial.

3.3.2 - As hipóteses formuladas por Weber

Embora Alfred Weber só apresente explicitamente em sua obra três pressupostos, Pode-se através de deduções chegar a pelo menos oito hipóteses que teriam sido consideradas pelo autor na formulação de sua Teoria e que estariam indiretamente expostas no livro. Desse modo, a literatura referente ao assunto lista como pressupostos assumidos por Weber:

(1) A existência de um plano homogêneo;

(2) Demanda, preço e renda são dados;

(3) Como estrutura de mercado têm se a concorrência perfeita. Um comportamento racional foi postulado;

(4) A localização dos mercados é dada. Vários centros consumidores são assumidos;

(5) As localizações e pesos das matérias primas e insumos são dados. Existe uma distribuição espacial desigual de matérias primas e insumos entretanto, o mesmo insumo é usado pela firma, qualquer que seja sua localização;

(6) Funções de produção linearmente homogêneas com coeficientes de produção fixos;

(7) A tarifa de transporte e proporcional ao peso e à distância. O meio de transporte considerado e a estrada de ferro que irradia-se por todas as direções de todos os pontos do plano;

(8) A mão de obra é ilimitada para um salário determinado, mas geograficamente fixa.

3.3.3 - Os Fatores locacionais

Weber classifica de três diferentes modos os vários fatores locacionais que determinam a obtenção de uma vantagem, traduzida por uma redução no custo de uma atividade econômica quando esta se localiza em determinado ponto do espaço geográfico.

A primeira classificação divide os fatores em gerais ou especiais. O fator geral é aquele comum a todas as empresas e o Fator especial pode ser entendido como um insumo específico necessário a determinadas atividades. Outra classificação serial Fator regional, quando influencia a distribuição regional das indústrias ou fator de aglomeração, quando influencia a localização inter regional, dispersando ou concentrando as indústrias em certos pontos do espaço. E, finalmente, o fator locacional pode ser ainda natural ou tecnológico. Social ou cultural".

Na teoria de Weber três Fatores terão participação junto à firma quanto a decisão de onde localizar-se: o custo de transporte, da mão de obra e as forças de aglomeração e desaglomeração.

As indústrias que poderiam se beneficiar das economias de aglomeração seriam aquelas capazes de comprimir uma parcela bastante significativa dos custos de operação.

3.4 - A Contribuição de Christaller: ”Central Places in Southern Germany”

Walter Christaller (1893 - 1969) iniciou seus estudos no ano de 1913 e se dedicou à estatística, sociologia, economia e geografia na Universidade de Heildelberg, na Alemanha, seu país de origem".

Pouco se sabia de sua vida e de seu trabalho até a recente publicação do ensaio intitulado “How I Discovered the Theory of Central Places” (junho de 1968) onde entre outros relatos, Christaller comenta o desenvolvimento de sua Teoria do Lugar Central. Em ”Central Place” Christaller se utiliza da teoria e métodos econômicos para explicar o caráter da cidade e a distribuição de seus estabelecimentos e assim tentar elaborar uma teoria geral ou pura dedutiva.

É interessante que, como geógrafo e conhecedor dos fundamentos da economia, Christaller justifica o uso da economia geográfica com um amplo conteúdo teórico.

Ele se utiliza da pesquisa histórica somada a métodos estatísticos e sobretudo da teoria econômica e abandona a indução descritiva, método comum nos estudos de geografia. A investigação deveria começar pela dedução pura.

Tudo indica que o fato de Christaller ter sido aluno de Weber quatro anos após a publicação de "Theory of Location of Industries” concorreu para este posicionamento. A influência de Weber sobre Christaller se faz notar, além da metodologia, em algumas abordagens como por exemplo, quanto a ocorrência de aglomerações nos pontos de intersecção das isodapanas críticas. Em seu modelo, Weber chega a analisar este fenômeno no que diz respeito a formação de centros populacionais"

Existem também similaridades entre os modelos de Thünen e Christaller, observadas em suas características e pressupostos e, especificamente, na adoção do método "ceteris paribus". A própria essência da Teoria do Lugar Central onde uma porção de terra dá suporte a um centro urbano se assemelha ao método de Thünen. E ainda porque Thünen já havia discutido a distribuição de estabelecimentos e, neste particular, seu estudo precedeu o de Weber. A diferença principal é que em “Central Place" as terras eram áreas de mercado enquanto na Teoria da Localização Agrícola eram áreas ofertantes.

O trabalho de Adam Smith, de Max Weber (o irmão de Alfred Weber), de Werner Sombart e o de outros eram igualmente familiares à Christaller. Foi através do conceito de economia excedente que este construiu sua justificativa para a existência de cidades.

Christaller incorpora em seu modelo fatores políticos,econômicos, sociais e geográficos a fim de estudar um sistema econômico espacialmente orientado, por inteiro“.

Enquanto a Teoria de Thünen estava orientada para o setor primário e a Localização de Weber enfatizava o setor secundário, a Teoria de Christaller se baseava na distribuição de atividades que podem ser classificadas como do setor terciário.

3.5 - Os pressupostos teóricos

O propósito de Christaller foi o de determinar se existiam leis que influenciavam o número, o tamanho e a distribuição das cidades.

3.5.1 - Os três princípios locacionais

Christaller apresentou três princípios e utilizou-os para explicar o número, tamanho e distribuição das cidades: o princípio de mercado, o de trânsito e o da separação. Os dois primeiros são princípios econômicos e o último sociopolíticos.

O princípio de mercado foi o mais importante na determinação do sistema e envolveu as funções centrais, os bens centrais e faixa destes bens.

Os bens e serviços necessários para prover as funções de produção eram classificados em três grupos:

- bens e serviços centrais;
- bens e serviços dispersos;
- bens e serviços indiferentes.

Os bens de serviços centrais usados para determinar o excedente do lugar central são aqueles pertencentes ao setor terciário da atividade econômica. A região cujo lugar central é o núcleo de funções centrais foi chamada de região complementar. Lugares centrais com muitas funções centrais foram classificados como de alta ordem e suas regiões complementares, teoricamente circulares com dois limites bem definidos, serão maiores. O padrão hexagonal das éreas de mercado resulta da necessidade de servir a uma região inteira com bens e serviços centrais.

Os outros dois princípios foram usados para calcular desvios em relação a este padrão básico hexagonal.

3.6 - A Teoria da Localização Industrial de Tord Palander

Tord Palander, sueco, desenvolve sua tese em 1935 e,em conformidade com o pensamento de economistas ortodoxos e especialistas da economia espacial de sua época, procura elaborar uma teoria de equilíbrio geral.

3.6.1 - Características e pressupostos conceituais de Palander

(1) Os preços variam. Admite-se curvas de demanda relativamente elásticas para o produtor.

(2) Funções de produção com coeficientes fixos. Funções ”Leontief”;

(3) A oferta de insumos perfeitamente elástica. O preço é fixo;

(4) Custos operacionais fixos. Variam os custos de transporte";

(5) Como estrutura de mercado admite-se a concorrência imperfeita;

(6) Os fatores de produção (capital e trabalho são relativamente móveis);

(7) Não admitem substituição entre fatores (ou insumos);

(8) Não consideram o tamanho da empresa.

Assim Palander inicia sua Teoria com a exposição da divisão espacial da produção e do mercado num sistema capitalista, análise que o leva a estabelecer algumas classificações nas relações espaciais econômicas.

As primeiras seriam as relações técnicas entre produção e consumo. Compreendem duas situações: ou a produção está ligada ao local de consumo ou é independente deste. O produto acabado está ligado essencialmente ao consumidor. Entretanto, através de uma verificação nos estágios do processo produtivo, pode-se definir a localização da indústria.

Em seguida, seriam as relações técnicas entre a produção e os fatores de produção. Analogamente a produção pode estar orientada para o local de obtenção de um ou mais fatores ou pode ser independente deste. Caso uma atividade econômica esteja ligada simultaneamente aos fatores de produção e ao consumidor, os consumidores devem deslocar-se. Palander observa entretanto que com o progresso tecnológico permitindo a substituição de fatores, a produção torna-se se cada vez mais independente destes.

Palander conclui também que diversas categorias do cálculo econômico surgem a partir da natureza da produção. E importância da escolha dos fatores, do método de produção e dos produtos depende do tipo de atividade econômica.

Finalmente Palander introduziu algumas considerações sobre a mobilidade dos fatores e acaba por considerar a mão de obra um fator fixo.

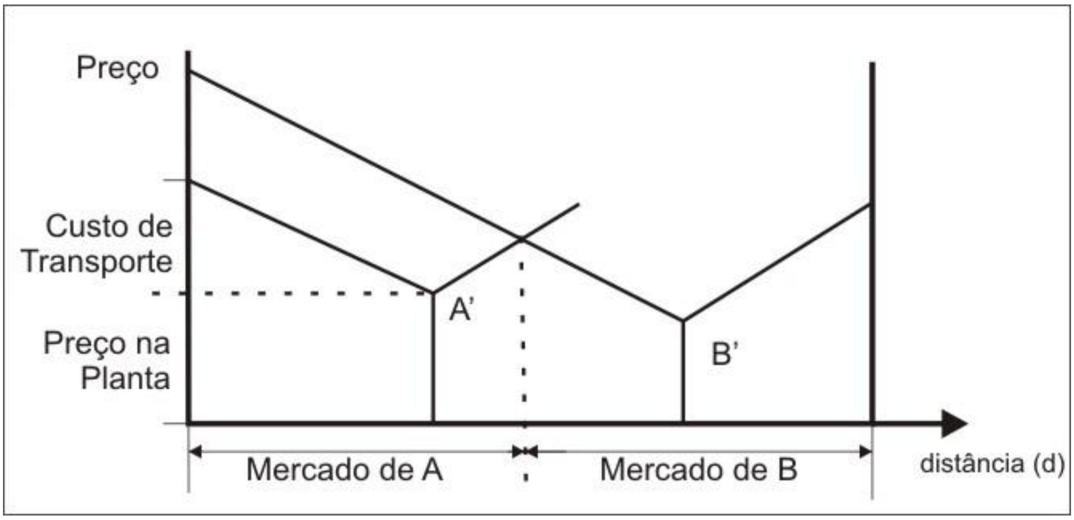
Depois de tecer tais considerações distingue-se dois questionamentos fundamentais:

1) Dado o local de produção, as condições de competição, os custos dos fatores e taxas de transporte como o preço afetaria a extensão da área na qual um certo produtor pode vender seu produto?

2) Dado o preço e a localização de matérias-primas e a posição do mercado, onde se localizaria a produção?

No estudo de áreas de mercado, Palander analisa o caso simples de dois fabricantes do mesmo produto de um mercado linear e utiliza este modelo para demonstrar como ficava o limite entre as duas áreas de mercado.

Isto pode ser ilustrado na figura seguinte, onde A e B são duas firmas que servem a um mercado distribuído ao longo do eixo horizontal do diagrama.



Concentrando-se nos efeitos da tarifa do frete, o autor estabelece algumas diferenças entre a tarifa que cresce proporcionalmente com a distância percorrida e a situação mais real, que corresponde à existência de uma tarifa que diminui em termos relativos com a distância percorrida.

Palander faz uso de um caso em que existem uma fonte de matéria-prima e um ponto de consumo afim de demonstrar que, com tarifas uniformes, o custo total de transporte será o mesmo em qualquer lugar de uma linha entre dois pontos, enquanto que, com a tarifa variável, tanto a fonte de matéria-prima como o mercado, são pontos onde o custo de transporte é mais baixo comparado com localidades intermediárias. Quando um terceiro ponto é introduzido para formar o triângulo locacional usado por Weber e Launhdart o efeito é similar.

Um incremento uniforme no custo de transporte em relação à distância de cada ponto revela um ponto de custo mínimo localizado dentro do triângulo, enquanto que, com a tarifa de frete variável, os vértices do triângulo se tornam as localizações mais atrativas. A tarifa mais comumente encontrada na pratica da origem a uma localização ótima junto ao mercado ou a fonte de matérias-primas, o que concorre para a ocorrência de concentrações demasiadas.

3.7 - A Teoria Econômica Espacial de Lösch

August Lösch nasceu em 1906 e Faleceu no Final da 2ª Grande Guerra, no final de 1945. Conhecedor das teorias tradicionais da localização desde Von Thünen. Lösch explora as análises realizadas anteriormente ampliando-as e coloca em discussão novas e importantes questões. Sua teoria ultrapassa o nível de equilíbrios parciais e se constitui um modelo de equilíbrio geral com introdução do fator espaço"

> *"Tal como a Teoria de Desenvolvimento Econômico considera o tempo, assim este livro incluirá o espaço e sua influência sobre a economia, não somente no caso de problemas individuais como já havia sido feito antes, mas no campo inteiro".* (Prefácio do livro "Teoria Econômica Espacial". August Lösch, 1939)

A obra "Teoria Econômica Espacial" é composta de um volume dividido em três partes. A primeira parte refere-se à Localização e se inicia numa abordagem da localização propriamente dita. Em seguida são apresentadas: a Teoria da Localização Industrial (na qual Lösch analisa a orientação segundo o transporte, valendo-se das isodapanas de Weber): a Teoria da Localização Agrária (onde a partir dos anéis de Thünen, Lösch descreve o efeito de mercados centrais no padrão de uso agrícola do solo); o estudo referente à formação de cidades (quando o autor se reporta a Hottelling e ao modelo de competição monopolista de Chamberlin); uma análise da formação de cinturões e, finalmente, no último capitulo desta 1ª Parte, Lösch desenvolve a questão da Localização na Economia Global.

No entanto, a Parte II e a Parte III, intitulada "Regiões Econômicas" e "Comércio", respectivamente, se constituem segundo o próprio autor, o núcleo da obra"

"Obviamente era necessário integrar os resultados dispersos da investigação anterior e harmonizá-los com a Teoria Econômica Geral. Porém, esta investigação conduz a uma teoria sistemática da localização, uma nova teoria do comércio exterior e talvez a uma primeira análise geral da natureza das regiões econômicas. Estas, ou seja, as Partes II e III formam o núcleo de todo o livro".

De fato, consagradamente uma de suas maiores contribuições é a análise da natureza e formação das regiões econômicas.

A seguir são apresentadas algumas comparações entre Lösch, Weber e Thünen.

QUADRO 1: DADOS BIOGRÁFICOS

Itens \ Autor	Johann Henrich von Thünen	Alfred Weber	August Lösch
PERÍODO/ORIGEM	1783-1850; Alemanha (Oldenburg)	1868-1958; Alemanha (Berlim)	1906-1945; Alemanha (Wunemberg)
EDUCAÇÃO FORMAL	Escola Agrícola de Gross-Flottbeck (1802) Universidade de Gottingen (1803)	Universidade de Berlim (1895)	Ginásio Real de Heidenheim (1925) Escola Comercial de Heidenheim Universidade:de Friburgo, Keil e Bonn (1927-1932)
FORMAÇÃO	Historia Natural Química Economia	Economia	Filosofia Economia História
OCUPAÇÃO	Proprietário de terras em Tellow (Mecklenbourg)	Professor da Universidade de Berlim (1899-1904) Professor da Universidade de Praga (1904-1907) Professor da Universidade de Heidelberg (1907-1 933; e nos últimos anos de vida) Especialista no Tesouro	Docente na Universidade de Bonn, Colaborador científico do Instituto de Economia Mundial da Universidade de Kiel Início dos anos 40)
OBRAS PUBLICADAS	Der Isolierte Staat in Benziehung auf Lanwritschaf und Nationalokonomie (The isolated State), publicado em três volumes (1826, 1850-1863, 1863) Description of Agricuture in the Village of Gross-Flottbeck; paper (1803)	Über des Standort der Industrien: Reine Theorie des Standons (1909) Deutschland und Die Europäische Kulturkrise (1924) Die Krise des Modernem Staalsgedankens in Europa (1925) Ideen sur Staats-und Kullursoziologie (1927) Das Endc der Demokratie? (1931) Kulturgeschichte als Kultursoziologie (1935) Das Tragische und die Geschichte (1943) Abschied von der Bisherigen Geschichte: Umberwindung des Nihilismus? (1946) Der Dritte Oder der Vierte Mensch: Vom	Die Räumliche Ordnung der Wirtschaft (1944) Eine Auseinandersetzung über das Transferproblem (1930) Wo gilt das Theorem der komparativen Koslen? (1938) The Nature of Economic Regions (1938) Was ist vom Geburtenrückgang zu halten? Recebeu prêmio Helfferich (1932) -Outros

QUADRO 2: CONTRIBUIÇÕES			
Itens \ Autor	**Johann Henrich von Thünen**	**Alfred Weber**	**August Lösch**
CONTRIBUIÇÕES	Princípio da substituição Teoria de produtividade marginal Uma versão da lei de diminuição de retornos Teoria do lucro (reconhecimento dos riscos) Doutrina dos salários justos	Ubiquidades (Ubiquities) e Materiais Localizados (Localized Materials) Materiais Puros (Pure Materials) e Materiais Brutos (Gross Materials) Índice de Material (Material Index) e Locational Weight (Peso Locacional) Isodapanas (Isodapane) Triângulo Locacional (Location Triangle) e Triângulo de Peso (Weight Triangle) Aglomeração (Aglomerations) e Desaglomeração (Deglomerations)	Ondas demográficas Mapeamento hexagonal Teoria do equilíbrio geral Cones de demanda Relação das rotas de transporte com os centros urbanos

QUADRO 3: CONTEXTO E INFLUÊNCIAS

Itens \ Autor	Johann Henrich von Thünen	Alfred Weber	August Lösch
CONTEXTO	Época de transição Cameralismo x Capitalismo Século XVIII; mercantilismo inglês/francês e cameralisino alemão Século XIX: Revolução Industrial: economia de mercado c desenvolvimento das cidades Transformações nas técnicas agrícolas e de transporte e crescimento da população	Primeiro período da Revolução Industrial Ocorrência de aglomerações industriais Correntes dc oposição ao liberalismo: escola historicista e escolas socialistas Forte influência da escola historicista no estudo da Economia na Alemanha Retorno da economia 'pura' como tentativa de retomar o classicismo inglês	
INFLUÊNCIAS	Lukas Staudinger (compartilhava das hipóteses de Thünen quanto ao Estado Isolado) Albrecht Thaer (visão da atividade agrícola como ciência) Adam Smith (conhecimentos de economia política) Adam Müller (desenvolvimento de sistemas intensivo e extensivo na agricultura) Ricardo (desenvolvimento similar de Teoria da Renda da Terra)	Apresenta pontos comuns com o modelo de Thünen: variação de um único fator; são tidas como teorias de 'custo mínimo' de localização; e grande importância ao custo de transporte - Weber citou Thünen diversas vezes em seu trabalho. Wilhelm Launhardt (desenvolvimento similar de triângulo locacional e triângulo de peso) Achille Loria (também considerou a perda de peso dos materiais brutos no processo de produção) Conhecimentos dos trabalhos de Wilhelm Roscher e Albert Schäffle	

QUADRO 4: TEORIA DA LOCALIZAÇÃO

Itens \ Autor	Johann Henrich von Thünen	Alfred Weber	August Lösch
SETOR (Contribuição Principal)	Agrícola	Industrial	Urbana
Nível (Micro, Macro)	Macro	Micro	Micro/Macro
TRATAMENTO ECONÔMICO (Estático, Dinâmico)	Estático	Estático	Dinâmico
MÉTODO UTILIZADO (Indutivo, Dedutivo)	Indutivo	Dedutivo	Dedutivo
NÍVEL DE ABSTRAÇÃO (comparação entre os três)	Menos abstrato	Intermediário	Mais abstrato
	Anéis Concêntricos	Isodapanas Triângulo locacional Triângulo de peso	Mapeamento hexagonal das áreas de mercado

QUADRO 5: MODELOS - HIPÓTESES E VARIÁVEIS

Itens \ Autor	Johann Henrich von Thünen	Alfred Weber	August Lösch
HIPÓTESES	Comportamento racional Concorrência perfeita Estado Isolado Uma cidade central Uma vila de colonização Topografia uniforme Fertilidade e clima uniforme Facilidade de transporte primário Demanda concentrada Oferta dispersa	Comportamento racional - Concorrência perfeita Vários centros consumidores, a - localização dos mercados é dada Mão de obra ilimitada para um determinado salário mas geograficamente fixa - Vendedores com acesso ilimitado ao centro consumidor Matérias-primas dispersas Planície homogênea Meio de transporte considerado: estrada de ferro Demanda concentrada Oferta concentrada	Competição monopolística Planície homogênea Distribuição uniforme de matéria-prima e mão de obra Disponibilidade de transporte em todas as direções População uniformemente distribuída com gostos e preferências idênticas Áreas de oferta de distribuição e de produção tão pequenas e numerosas quanto possível Os custos são homogêneos para firmas do mesmo ramo industrial Demanda dispersa Oferta concentrada
DADOS DO MODELO	Constantes: - preços na cidade (centro) - taxas de transporte no centro Variáveis: - distância dos distritos ao centro - tamanho das fazendas - o retorno líquido obtido por unidade de terra - os custos (coeficientes) de produção	Constantes: - Coeficientes de produção - preço e renda - taxa de transporte Variáveis: - distância percorrida: da matéria-prima para o local de produção e do produto final para o mercado - peso das matérias-primas - peso do produto final - custo da mão de obra	Constantes taxas de transportes

3.8 - Consideração Especial sobre a Escola Clássica Alemã

Vários economistas participavam desta escola e que foram os precursores dos princípios e teorias de localização industrial que se formavam. Sua preocupação era voltada fundamentalmente com os efeitos da dimensão espacial na análise econômica, surgiu no século XIX e seus principais autores eram nomes importantes como LÖSCH, MARSHALL, VON THÜNEN, WEBER, entre outros, como citado anteriormente.

"A formulação do problema de localização é a questão mais fundamental para os economistas, enquanto a sua solução é mais uma questão de engenharia e pesquisa operacional". (PERREUR, 1974).

Trabalhos mais recentes, e não menos importantes, viram o ressurgimento dos trabalhos destes economistas por PORTER, em seus trabalhos sobre estratégias para obtenção de vantagens competitivas das empresas. São elementos relacionados com as externalidades importantes na localização de indústrias competitivas como, por exemplo, a sua distância ao mercado e aos seus fornecedores, que são estudos na área de localização industrial. Autores como Fujita, Krugman e Varnables, também voltaram seus estudos para este tema. (SILVA, ARANGO e GUSMÃO, 2009).

Pela teoria Weberiana da localização industrial, ainda segundo os autores, o fator locacional pode ser entendido como vantagem ou ganho, voltado para a redução de custos e considera três fatores para a localização de indústrias:

Custos de transporte: dependentes da distância e da disponibilidade de vias de comunicação (entre outros fatores). Desta forma fatores como a proximidade de mercado consumidor e matérias primas, ou fornecedores seriam consideradas importantes para a localização;

- Custo de mão de obra e
- Combinação de forças de aglomeração e desaglomeração.

Em seguida discorre-se sobre a ferramenta considerada atualmente a mais poderosa para a estruturação dos modernos modelos de hierarquia locacional. A lógica fuzzy.

Apresenta-se os elementos básicos e mínimos para o entendimento dos modelos considerados.

4 - CONJUNTOS FUZZY (alguns aspectos elementares de base)

DEFINIÇÃO

Um conjunto fuzzy ou nebuloso é uma classe com limites imprecisos, mais precisamente é uma coleção de elementos em um universo de informação onde a fronteira não é nítida ou ambígua. Qualquer correção da ambiguidade nos leva apenas à "aproximação". "*Não se imagina como tudo é vago até que se tenta fazê-lo de maneira precisa*".

- Conjuntos fuzzy são uma extensão da teoria dos conjuntos clássicos, ou crisp.

- Um conjunto clássico pode ser definido como uma coleção de objetos ou elementos de algum conjunto universo, como em:

$$A = \{ X_1, X_2, X_3, ..., X_n. \}$$

- Um conjunto universo X é um conjunto não vago que consiste de todos os elementos em um espaço de relevância. A característica da função, μ_x *(x)* é assim representada:

$$\mu_x\ (x) = 1\ \forall_{x},\ \in\ X$$

$$\mu_x\ (n) = 0\ \forall_{x},\ \subseteq\ X$$

- Relações clássicas são normalmente definidas como um subconjunto

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n ...$$

generalizando-se como:

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$$

Uma discreta relação binária R_1 pode ser representada da forma

R_1

$x_1 \backslash x_2$	1	2	3	4
5	1	1	1	0
6	0	1	1	1
7	1	1	0	1
8	1	1	1	

Uma relação fuzzy entre:

$$X = \{x_l, x_2, x_3\} \text{ e } Y = \{y_1, y_2, y_3\}$$

se distingue pela relação de diferentes graus de importância possíveis, como exemplo:

x \ y	y_1	y_2	y_3
1	.7	1	0
2	.8	7	9
3	1	1	1

isto é assumido dado que μ_R é mapeado num espaço de X x Y.

Seja X, Y $\subseteq$ R e

$A = \{ X1,\ \mu_A(x) \mid x \in X\}$

$B = \{ Y1,\ \mu_B(y) \mid y \in Y\}$

Então: $R = \{ [(x,y),\ \mu_R\ (x,y)] \mid (x,y) \in X \times Y\}$ que é a relação entre A e B.

Dado que as relações fuzzy são subconjuntos do produto cartesiano, pode-se desenvolver um aspecto particular da "Álgebra das Relações" fuzzy.

Seja $\underline{m}$ e S dois binários selecionados de X para Y.

A união de R e S é dado por

$\mu_{R\cup S}$ (x,y) = máx{μ_R(x,y), μ_S(x,y)}

A interseção é dada por

$\mu_{R\cap S}$ (x,y) = {μ_R(x,y), μ_S(x,y)}

A soma algébrica é data por

μ_{R+S} (x,y) = μ_R(x,y) = μ_R(x,y) - μ_S(x,y) μ_S(x,y)

O produto algébrico é

μ_{RS} (x,y) = μ_R(x,y) μ_S(x,y)

O complemento de R é dado por

μ_R= (x,y) = 1- μ_R(x,y)

A inclusão é dada por

$R \subset S \leftrightarrow \mu_R(x,y) \leq \mu_R(x,y)$

A interseção é

$R \cap S \leftrightarrow \mu_{R\cap S}(x,y)$

Complemento

$R \leftrightarrow \mu_R\ (x,y) = 1 - \mu_R(x,y)$

4.1 - Conectivos Lógicos

Na identificação dos fatores ou elementos, suas dimensões e atributos considera-se a cadeia de informações cognitivas, sugerida por “Freksa, 1982":

- Objeto
- Percepção
- Representação mental
- Representação verbal
- Descrição formal
- Interpretação ou Diagnóstico

Operações com subconjuntos fuzzy

Inclusão:

Considere dois conjuntos X_1 e X_2

μ_1 (x) $\leq$ μ_2(x) $\forall_x \in X$

μ_2 (x) $\leq$ μ_2(x) $\forall_x \in X$

Igualdade:

μ_1 (x) = μ_2(x) $\forall_x \in X$

Interseção:

(μ_1 (x) $\cap$ μ_2)(x) = mín { μ_1 (x), μ_2(x) }

Complemento:

μ_1 (x) = 1 - μ_2(x) $\forall \in X$

Produto Cartesiano

O produto cartesiano de conjuntos fuzzy é definido da forma:

Seja A_1 x A_2 x ... x A_n conjuntos fuzzy ou, X_1 x X_2 x ...x X_n

É um conjunto no espaço X_1 x $X_{2...}$x X_n com as funções de pertinência

A soma confinada $\subseteq$ = A $\oplus$ B é definida como:

$$\subseteq = \{ x, \mu_A \oplus {}_B(X)) \mid x \in X\}$$

As propriedades fundamentais dos conjuntos clássicos que se aplicam aos conjuntos fuzzy. Apenas duas das propriedades não se adéquam à Lei da Contradição e à Lei do Meio Excluído.

A tabela a seguir mostra outras propriedades dos conjuntos fuzzy e sua representação:

Nº	Propriedade	Representação
01	Absorção	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
02	Absorção por X e $\emptyset$	$A \cup X = X$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
03	Associatividade	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
04	Comutatividade	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
05	Distributividade	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
06	Idempotência	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
07	Identidade	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap X = A$
08	Involução	$\neg \ \neg A = A$
09	Lei de Contradição	$A \cap \neg A = \emptyset$
10	Lei de Morgan's	$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$ $\neg A \cup B = \neg A \cap \neg B$
11	Lei do Meio Excluído	$A \cup \neg A = X$

Tabela: Propriedades fundamentais das operações sobre conjuntos tradicionais

4.2 - Valores Fuzzy

Valores verdade para:

Negação ($\bar{P}$), leia-se não P

Conjunção ($\wedge$) p $\wedge$ q, leia-se p e q

Disjunção ($\vee$) p $\vee$ q, (p ou q)

Implicação (Proposição Condicional), p $\Rightarrow$ q

Composição de Regras para proposições fuzzy

Proposições que envolvem os conjuntos A = { x, μ_A (x) } e B = { y, μ_B (y) }

i. x é A - proposição na forma canônica (Cânon - Regra geral de onde se infere regras especiais)

ii. x é mA - proposição modificada.

iii. Se X é A então y é B, proposição condicional.

Vínculo Semântico

O Vínculo Semântico refere-se à inclusão dos conjuntos fuzzy tomando parte nas proposições:

$p \equiv$ x é A $\quad q \equiv$ x' é B

Ambas as definições pertencem ao mesmo conjunto universo U, diz-se que a proposição *p* semanticamente vincula-se à proposição *q* (ou vice-versa), denotado por

$p \rightarrow q$

Composição conjunção p $\wedge$ q

O valor verdade (t_r) de p $\wedge$ q (*p* e *q*) é definido por

t_r (p $\wedge$ q) = μ_{AxB} (x,y)= min (μ_A (x), μ_B (y)) $\in$ A x B,

onde

μ_{AxB} (x , y) é a função de pertinência do produto direto mín.

Composição disjunção p $\vee$ q

O valor verdade de p $\vee$ q (p ou q) é definido por:

t_r (p $\vee$ q) = μ_{AxB} (x,y)= max (μ_A (X), μ_B (y)) $\in$ A x B,

onde

μ_{AxB} (x , y) é a função de pertinência do produto direto máx.

Composição implicação p $\rightarrow$ q

O valor verdade de p $\rightarrow$ q (se p ..., então q) é definido por:

t_r (p $\rightarrow$ q) = mín(1, 1- μ_A (x) + μ_B (y)), (x,y) $\in$ A x B, significando que em cada par (x , y) no produto cartesiano A x B anexa-se o menor valor de pertinência entre 1 e 1 - μ_A (x) + μ_B (y).

Expressão dos conjuntos fuzzy

Expressão discreta:

Seja o universo finito X:

X = {x_1, x_2, ..., x_n}

Então o conjunto fuzzy A em X pode ser escrito como se segue:

A = μ_A (x_1)/x_1 + μ_A (x_2)/x_2 + ... + μ_A (x_n)/x_n

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_A \text{(xi)/xi}$$

Quando o conjunto fuzzy é infinito pode-se representá-lo como:

$$A = \int_{X} \mu_{A}(xi)/xi$$

4.3 - Conjuntos Normal, Convexo e Cardinalidade Fuzzy

Um conjunto fuzzy é chamado normal se:

máx μ_A (X) = 1, no conjunto A no universo X.

$x \in X$

$\mu_A (X) \geq \mu_A (X_2) \Lambda \mu_A (X_2)$

ou para:

$\forall\ x_1 \in X,\ \forall\ x_2 \in X,\ \forall\ \lambda \in [0,l]$

$$\mu_A (X)(x_1 + (1 - x)x_2) \leq \min (\mu_A (X_1),\ \mu_A (X_2))$$

Conjuntos fuzzy convexo e não convexo podem ser observados nas figuras abaixo:

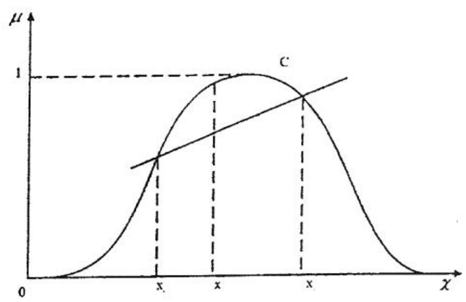


Fig. (a) Conjunto fuzzy convexo

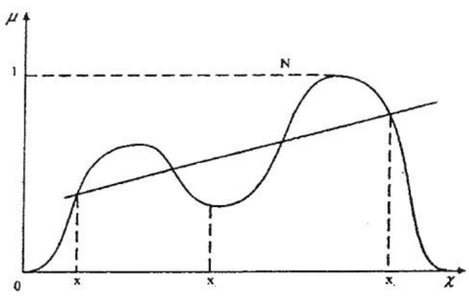


Fig. (b) Conjunto fuzzy não convexo

Cardinalidade

Considerando X um conjunto finito, a cardinalidade escalar do conjunto fuzzy A, é expressa da forma:

$$|A| = \sum \mu_A(X), \qquad x \in X$$

Quando um conjunto fuzzy A tem um número finito de elementos de suporte a cardinalidade fuzzy |A| é definida por:

$$\mu\ |\tilde{A}|\ (\ |\ A\alpha\ |) = \alpha \quad \text{ou} \quad \mu\ |\tilde{A}|\ (|A\ \lambda\ |) = \lambda,$$

onde, α ou λ representam o nível de corte num espaço fuzzy.

Cardinalidade relativa

Por sua vez a cardinalidade relativa é definida por:

$$||A|| = \frac{|A|}{|x_n|}$$

onde, $|\ X_n\ |$ é o número de elementos de suporte, ou a cardinalidade do universo X.

Relação de Equivalência

A igualdade dos conjuntos fuzzy A e B é definida como:

$$A = B \Leftrightarrow \mu_A = \mu_A,\ \forall_x\ X \in X$$

Relação de Inclusão

- A inclusão do conjunto A em B é definida como:

$$A \subset B \Leftrightarrow \mu_A(x) \geq \mu_A(x),\ \forall\ x \in X$$

Complemento: A $\Leftrightarrow$ μ_A (x) = 1 - μ_A (x) $\forall$ x e X

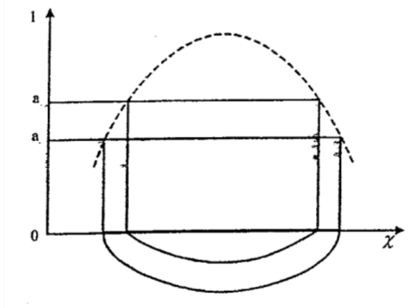
" α - cut **" e o princípio de decomposição**

Seja um conjunto fuzzy A no universo X

forte α - cut $\Delta\{x \mid \mu_A(x) > \alpha\}$, $\alpha \in [0,1]$

fraco α - cut $\Delta\{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$, $\alpha \in [0,1]$

Um conjunto fuzzy A pode ter sua função de pertinência μ_A (x) decomposta em um número infinito de funções de pertinência retangulares.

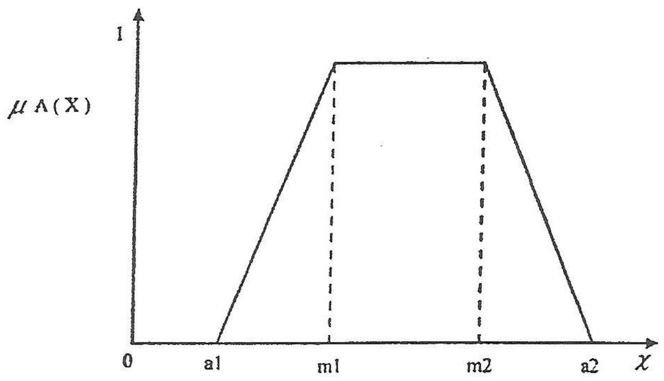


Ao agregar-se às funções de pertinência retangulares e fazendo uso da operação - máx - encontra-se o conjunto fuzzy original:

Um número fuzzy A de superfície plana satisfaz a seguinte condição:

(m_1,m_2) e R $m_1 < m_2$

μ_A (x) = 1 $\forall$ x $\in$ $[m_1,m_2]$, um caso particular de um número fuzzy trapezoidal.



As quatro operações de números fuzzy dado o intervalo $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ e $[a_3, b_3]$, temos:

(1) $[a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_2, b_2] + [a_1, b_1]$

(2) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = [a_2, b_2] \times [a_1, b_1]$;

$([a_1, b_1] + [a_2, b_2]) + [a_3, b_3] = [a_1, b_1] + ([a_2, b_2] + [a_3, b_3])$;

$([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) \times [a_3, b_3] = [a_1, b_1] \times ([a_2, b_2] \times [a_3, b_3])$;

(3) $([a_1, b_1] + [a_2, b_2]) \times [a_3, b_3] = [a_1, b_1] \times [a_3, b_3]) + [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$

4.4 - Operadores Fuzzy Generalizados

Várias formulações para operadores fuzzy generalizados podem ser encontradas na literatura. As t-normas (normas triangulares) são operadores que generalizam a operação de interseção, enquanto que as s-normas (ou t-conormas) generalizam a operação de união. Por definição, todos os operadores que pertencem a essas classes de funções possuem as propriedades de associatividade, comutatividade, monotonicidade e contorno. Algoritmos para uma implementação em MatLab[1] de algumas formulações mais comuns de operadores t-norma e s-norma são descritas em Jang *et al*. (1997, p. 39) e Klir e Yuan (1995) apresentam em forma tabular uma boa variedade de t-normas e s-normas .

Para melhor entendimento, descreve-se a seguir as definições formais, propriedades e alguns exemplos de operadores t-norma e t-conorma:

a) Classe de operadores de interseção generalizada (t-norma)

Uma t-norma é uma função de duas variáveis T : [0,l] x [0,l] -> [0,l], simbolizado por: $\mu_{A \cap B}$ (x) = t(μ_A (x), μ_B (x)) e que satisfaz as seguintes propriedades:

- **Condição de contorno**: t(0,0) = 0 e t(a,l) = t(l,a) = a

---

[1] MatLab é um ambiente computacional interativo, que possui uma linguagem de programação de alto nível, voltada para computação matemática. Para mais informações, consultar Matsumoto(2001) ou Hanselman e Littlefield(2003).

Esta restrição visa garantir que quando o valor de pertinência for 1 ou 0, que corresponde aos casos onde recaímos no conjunto clássico, serão obedecidas as regras da teoria dos conjuntos clássica, para manter a compatibilidade.

- **Monotonicidade**: t(a,b) $\leq$ t(a,d), se b $\leq$ d

Implica em que quando houver decréscimo nos valores das funções de pertinência de A ou B não ocorrerá acréscimo no valor da interseção e vice-versa.

- **Comutatividade**: t(a,b) = t(a,b)

Indica que para o operador, a ordem em que os conjuntos são combinados é indiferente.

- **Associatividade**: t(a,t(b,c)) = t(t(a,b),c)

Indica que a sequência de operações de interseção pode ser feita em qualquer ordenamento de pares.

b) Classe de operadores de união generalizada (s-norma)

Uma t-conorma é uma função de duas variáveis S : [0,1] x [0,1] -> [0,1], simbolizado por: $\mu_{A \cup B}$(x) = s(μ_A (x), μ_B (x)) que satisfaz as seguintes propriedades:[2]

---

[2] As justificativas apresentadas para as propriedades na interseção são equivalentes para o caso da união.

- **Condição de contorno**: s(1,1) = 1 e s(0,a) 1 s(a,0) = a
- **Monotonicidade**: $s(a,b) \leq s(a,d)$, se $a \leq b \leq d$
- **Comutatividade**: s(a,a) = s(a,b)
- **Associatividade**: s(a, s(b,c)) = s(s(a,b), c)

Os operadores de mínimo e de máximo, além de satisfazer a essas quatro propriedades, também atendem a condição de idempotência, distributividade e a Dualidade de Morgan.

Operadores t-norma e t-conorma mais utilizados

Operador t-norma	**t(a,b) =**
Mínimo	mín(a,b)
Produto Algébrico	a*b
Produto Limitado	$0 \vee (a + b - 1)$
Produto Drástico	T(a,b) = a, se b=1 ou T(a,b) = b, se a=l ou T(a,b) = 0, se a, b < 1

Operador t-conorma	**s(a,b) =**
Máximo	máx(a,b)
soma Algébrica	a + b – ab
soma Limitada	$1 \wedge (a + b)$
soma Drástica	T(a,b)= a, se b=0 ou T a,b = b, se a=0 ou T(a,b)= 1, se a,b > 0

Modificadores

O uso de modificadores[3] na modelagem tem como objetivo conseguir maior semelhança com a linguagem natural. Sua função equivale àquela que os adjetivos e advérbios assumem na linguagem. Ou seja, da mesma forma que estes mudam as características de substantivos e verbos, os modificadores, na teoria dos conjuntos nebulosos, alteram a forma das funções de pertinência, transformando um conjunto nebuloso em um novo conjunto.

[3] Denominados “Hedges” na literatura estrangeira.

4.5 - Hedges (modificadores)

Termos que são usados para modificar a forma dos conjuntos fuzzy

- Muito, algo mais ou menos, um pouco;

São universais;

Compostos de nome e fórmula

Muito:

$$\mu_A^M\ (x) = \left(\mu(x)\right)^2$$

Extremamente:

$$\mu_A^M\ (x) = \left(\mu(x)\right)^3$$

Muito muito:

$$\mu_A^M\ (x) = (\mu(x))^4$$

Mais ou menos:

$$\mu_A^M\ (x) = \quad \left(\mu(x)\right)^{1,3}$$

Verdadeiramente?

$$\mu_A^M\ (x) = 2\text{x}\left(\mu_A\ \ (x)\right)^2, 0 \leq \mu \leq 0,5$$

$$\mu_A^M\ (x) = 1 - 2\left(1 - \mu_A\ \ (x)\right)^2, 0,5 \leq \mu \leq 1$$

4.6 - Hierarquização de Números Fuzzy

A proposta de Chen (1985)

Proposta de Chen - Definição 1

O conjunto de maximização M é um subconjunto fuzzy com função de pertinência F_M dado como:

$$f_M(x) = \begin{cases} [(x - x_{min}) / (x_{max} - x_{min})]^k & x_{min} \leq x \leq x_{max} \\ 0 & \end{cases}$$

Onde:

$x_{min} = \inf S$

$x_{máx} = \sup S$

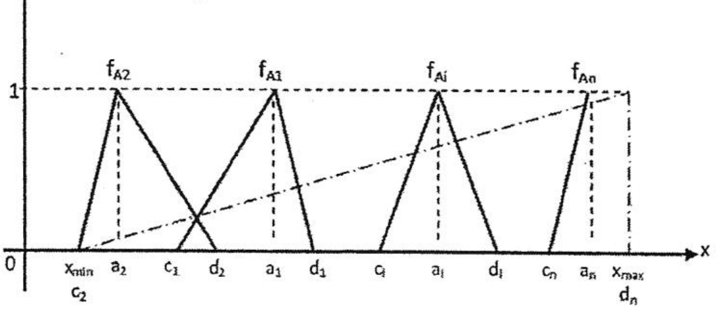
$S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$

$S_i = \{x \mid f_{Ai}(x) > 0\}$

Proposta de Chen - Definição 2

O "*right utility value*" (valor da utilidade direita) de cada alternativa A_i é definido como:

$$U_M(i) = \sup_x \left(f_M(x) \wedge f_{Ai}(x)\right), \quad i = 1,2,\ldots,n$$



Proposta de Chen - Definições 3 e 4

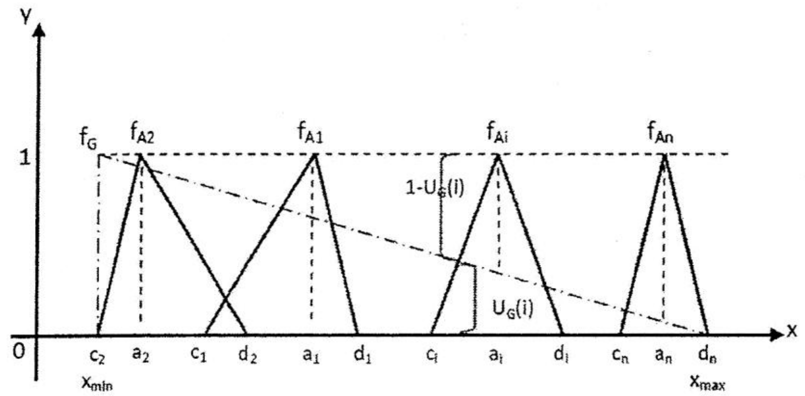
3 - O valor *"left utility"* de cada número fuzzy A_i é definido como:

$$U_G(i) = \sup_x \left(f_G(x) \wedge f_{A_i}(x)\right), \quad i = 1,2,\ldots,n$$

4 - A utilidade total ou valor de ordem de cada número fuzzy A_i é:

$$U_T(i) = \left[U_M(i) + 1 - U_G(i)\right]/2, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Utilidade Total



Rotações Fuzzy (desenvolvimento do conceito introduzido na pág. 33)

Uma relação clássica num conjunto de pares ordenados (μ ,υ)

Sejam X_1, X_2, X_3, ..., x_n conjuntos clássicos

Os subconjuntos do produto cartesiano são chamadas relações "n-ary"

A relação binária é reflexiva se: $\forall \mu \in$ U:

se (μ ,υ) $\in$ R

É anti-reflexiva, se: $\forall \mu \in$ U:

se (μ ,υ) $\notin$ R

É simétrica se: (u,v) $\in$ R --> (v,u) $\in$ R

É anti-simétrica se: (u,v) $\in$ R e (v,u) $\in$ R

então: u=v, $\forall$ u, n $\in$

R é transitiva se: $(\mu, \upsilon) \in R$ e,

$R(n,w) \in R, \forall n, v, w \in u$

Definição

Seja X e Y conjuntos não vazios. A relação fuzzy R é um subconjunto fuzzy de X x Y, ou $R \in F(X \times Y)$.

Se x = y então R é uma relação binária fuzzy em X.

$$\begin{array}{c} \\ R = \end{array} \begin{array}{l} \quad\quad\; y_1\ y_2\ y_3 \\ \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ x_2 & & & \\ x_3 & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

A relação R fuzzy entre os conjuntos X e Y são definidas com

$R = \int_{X \times y} \mu_R(x,y) / (x,y)$, onde: μ_R é a função de pertinência de R dado o produto cartesiano X x Y com:

$\mu_R : X \times Y \dashrightarrow [0,1]$

Escreve-se essa relação binária por uma expressão discreta.

Sejam os conjuntos universo X e Y

$X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$

$Y = \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\}$

Esta relação pode ser expressa de forma matricial

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_{m-1} & y_m \end{array} \\
R = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} & \begin{bmatrix} \mu_R(x_1, y_1) & \mu_R(x_1, y_2) & \cdots & \mu_R(x_1, y_{m-1}) & \mu_R(x_1, y_m) \\ \mu_R(x_2, y_1) & \mu_R(x_2, y_2) & \cdots & \mu_R(x_2, y_{m-1}) & \mu_R(x_2, y_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_R(x_n, y_1) & \mu_R(x_n, y_2) & \cdots & \mu_R(x_n, y_{m-1}) & \mu_R(x_n, y_m) \end{bmatrix}
\end{array}
$$

4.7 - Métodos de Fuzzyficação

1 - O centro de gravidade do conjunto resultante

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i * w}{\sum_{i=1}^{n} h_i},$$

Onde, *w* é o centro de gravidade do conjunto resultante, após a operação difusa e *h* é a altura do mesmo.

2 - Centro de gravidade ponderada pela área

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i * W_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i},$$

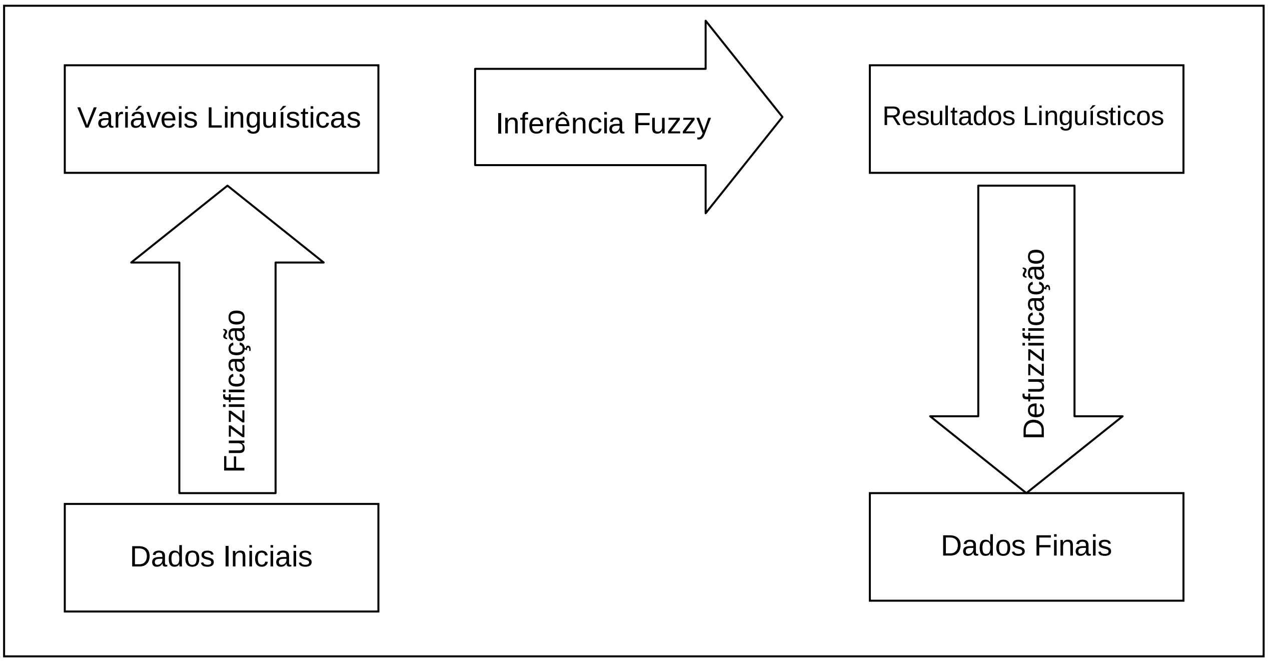
Onde, *w* é o centro de gravidade do conjunto resultante após a operação difusa e *s* é a área do mesmo conjunto.

3 - Pontos de peso máximo pelo critério de área

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i * G_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i},$$

Onde, *G* é o ponto de máximo critério e *s* a área do mesmo conjunto.

INFERÊNCIA FUZZY



Sistema Lógico fuzzy, Fonte: Cox (1995).

Em seguida são apresentadas estruturas modulares com suporte da lógica e da matemática fuzzy.

5 - LOCALIZAÇÃO INDUSTRIAL

5.1 - O Modelo Masterli

O documento "MASTERLI - MODELO DI ASSETTO TERRITORIALE E DI LOCALIZZAZIONE INDUSTRIALE", descreve os objetivos da colocação metodológica adotada e as soluções técnicas concebidas para construir um modelo de ordenação territorial e de localização industrial designado pela sigla MASTERLI[4].

Em 1971 a CONFEA deu à SOMEA (italiana) e à SEMA (francesa) o encargo de analisar, a nível de pesquisa básica, instrumentos que levassem à solução dos problemas de localização industrial observando a questão sob o prisma do simples investidor industrial (procura da localização ótima) e da Administração Pública (gestões sobre o território e política industrial). A equipe interdisciplinar formada chegou à apresentação do projeto MASTERLI cujas características principais serão aqui destacadas.

Objetivos do Projeto:

1. determinação de um instrumento utilizável aos fins da escolha de política industrial regional;

---

[4] "O modelo MASTERLI foi elaborado pelos pesquisadores Dino Attanasio, Jean-Marie Boureche, Giovanni Enriques, Maurizio Maravalle, Georges Nahon, Doménico Tosado, membros da equipe mista SOMEA(Itália)/SEMA(França).

2. determinação de um instrumento aos fins da escolha da(s) localização(ções) ótima(s) de um projeto de investimento industrial.

Os modelos que analisamos colocam em primeiro plano o problema de seleção dos setores mais adequados e que se fundamentaram na composição qualitativa. A eventual integração deste processo com as análises e modelos regionais e inter-regionais, que se apoiam nas tabelas de insumo-produto é de especial interesse.

A vantagem principal desta concepção é constituída pela certeza de que a escolha setorial efetiva tem possibilidades concretas de realização econômica. Portanto ulteriores problemas acerca da contribuição para o desenvolvimento regional dos diferentes setores, se podem colocar diretamente em termos de um conjunto de projetos, evitando escolhas abstratas, destinadas a sobreviver com dificuldade.

Por outro lado, o enfoque que se procura dar recupera os elementos indicativos fornecidos pelas trocas intersetoriais e inter-regionais, através da análise dos fatores de localização ligados aos insumos de produção e à disponibilidade dos mesmos nas várias regiões.

5.1.1 - O modelo MASTERLI apresenta peculiaridades que são incorporadas na matriz COPPETEC-COSENZA, são elas:

1. **Aspecto global do quadro de referência**, no sentido de que projeto considera simultaneamente, sob o ponto de vista territorial, regiões e áreas elementares com diferente nível de desenvolvimento, de equipamentos e de tradição industrial; e também, sob o ponto de vista setorial, relativamente a fabricações que se diferenciam pelas dimensões, pelo dinamismo ou pelo conteúdo tecnológico;

2. **Flexibilidade e consistência**, no sentido de que o projeto permite chegar a soluções especificas para áreas elementares e determinadas produções.

Sinteticamente, o modelo MASTERLI prevê três tipos de elaborações sucessivas. A primeira delas consiste na organização e interpretação dos dados relativos à oferta de condições de implantação nas áreas elementares (matriz de incidência áreas elementares/fatores de localização oferecidos), por intermédio da construção de uma tipologia simples relativa às mesmas grandezas.

A **tipologia simples** - *áreas elementares/fatores de localização oferecidos* - permite dispor de uma classificação das áreas elementares evidenciando tanto a eventual presença de uma ordem vertical (hierarquia) como possíveis vocações específicas.

A segunda elaboração, semelhante à primeira, consiste na organização e na interpretação dos dados relativos à demanda de condições oriundas dos vários projetos (matriz de incidência projetos industriais/fatores de localização demandados), por intermédio da construção de uma tipologia relativa às mesmas grandezas.

Poderíamos considerar aqui a construção dos algoritmos como uma complexa interação entre a criatividade, uma abstração continua a realidade empírica, concretizada pelas aspirações mais imediatas.

A maioria dos modelos de localização, constantes da literatura têm-se destacado pelo tratamento matemático que é dado à minimização de custos e a maximização do lucro. São modelos que trabalham com elementos quantitativos envolvidos na decisão de localização das atividades econômicas.

A dificuldade na discriminação quantitativa dos fatores, a existência de numerosos fatores não quantificáveis, informações estatísticas frequentemente imprecisas etc., nos leva à proposição do uso de modelos baseados na teoria de conjuntos Fuzzy; mais que uma teoria é uma filosofia, pois a criatividade na estruturação dos algoritmos, para uma maior aproximação do real, é uma oportunidade que se concede ao pesquisador. A imaginação, mais do que o conhecimento, é aqui requisitada, uma possibilidade de explicitação do espírito. O método de análise de alternativas locacionais se apoia na construção de hierarquia ponderada para cada localização. Um exemplo simples de estrutura matricial. Uma concepção de Narasinhau.

Considere;

$L_1, L_2, ..., L_n$: conjunto de alternativas;
$a_1, a_2, ..., a_n$: conjunto de atributos;
$w_1, w_2, ..., w_n$: pesos associados aos atributos;
r_{ij}: coeficiente da operação $\otimes$, produto entre a alternativa *i* o atributo *j*,

Normaliza-se r_j para a alternativa *i* através da expressão:

$$\bar{r}_{ij} = \frac{\sum_{j=1}^{m} w_j r_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} w_j}$$

Como os r_{ij}' se w_j's são variáveis fuzzy, r_{ij} seria também uma variável fuzzy, com uma função associada $\otimes$ para a alternativa i introduzida pela relação,

$$g(z) = \frac{\sum_{j=1}^{m} w_j r_j}{\sum_{j=1}^{m} w_j}$$

onde, o vetor z = $(w_1, w_2, ...,w_m, r_1, r_2, ..., r_n)$.

A função associada à hierarquia ponderada é dada por:

$\mu_{Ri}(\bar{r}_i)$ = Sup $\mu_{zi}(z)$, $\bar{r}_i \in R$

z: $g(z) = \bar{r}_i$

Com o objetivo de comparar alternativas, um índice pode ser obtido para determinar quanto uma alternativa é melhor que a média ponderada das alternativas. Isto é,

$$p_i = \bar{r}_i - \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^{m} \bar{r}_k$$

Dado que os valores hierarquizados são fuzzy, p_i também é uma variável fuzzy, com função associada:

$\mu_{pi}(p_i)$ = Sup $\mu_R(r_1, r_2, ..., r_n)$, $p_i \in R$

$r_1, r_2, ..., r_n$: $h_i(r_1, r_2, ..., r_n) = p_i$

A função associada μ_{p2}, por exemplo pode ser usada para julgar o grau da alternativa 2 sobre as outras. As funções associadas têm a seguinte forma geral;

$\mu_y(y)$ = Sup $\Lambda_{i=1}^{m}$ $\mu_i(x_i)$, $y \in R$

$X \in R^n$: $f(x) = y$

onde, $X = \{x_l, x_{2, ...,} x_n\}$, f: $R^n \rightarrow R$ e μ_i(.) são funções associadas

Este exemplo mostra a flexibilidade da teoria, pois a suposição $0 \leq r_{ij} \leq 1$ não é por ela necessariamente requerida, de forma análoga w_j é uma variável fuzzy que nos dá a importância relativa do atributo *j*, onde $0 \leq w_j \leq 1$. As funções associada à variável fuzzy, assumem valores no intervalo [0, 1].

5.2 - Considerações Adicionais Sobre a Estrutura do Modelo Masterli

Identifica-se primeiro as condições infraestruturais das regiões selecionadas (setores gerais ou comuns às regiões).

Matriz da incidência projeto indústria/fatores de localização desencadeados.

Classificando:

F – fatores comuns na região e ao projeto industrial

F_v – fatores específicos das regiões (elementos do clima, tipos de solo, matérias primas, etc.).

Matriz de incidência

$((V_{ik})) = F + F_v$

	Fatores de Localização	
Região	F	F_v

O elemento genérico V_{ik} representa a oferta do fator k na zona i.

Matriz de incidência no projeto industrial/fatores de localização demandados:

$((P_{jk})) = F + F_p$

Fatores de Localização

Projeto industrial	F	F_p

O elemento genérico P_{ik} representa a demanda do fator K pelo projeto j.

5.3 - Construção de uma tipologia simples

Utiliza-se aqui a distância euclídea dadas a regiões V_i e V_j, temos:

$$d^2(Vi, Vj) = \sum (Vik - Vjk)^2$$

Este é um conceito de distância que se permite a estruturação de um problema típico DYC (*dynamic clustering*).

Estrutura de uma tipologia cruzada

Dada uma região

$$V_i = \begin{bmatrix} Vil \\ . \\ . \\ Vik \\ . \\ . \\ Vin \end{bmatrix}$$

Dado um projeto

$$Pj = \begin{bmatrix} Pjl \\ . \\ . \\ Pjk \\ . \\ . \\ Pjn \end{bmatrix}$$

Define-se então o conceito de Distância Assimétrica (DAS)

$$d^2\left(Vi, Pj\right) = \sum \ (P_{jk} - V_{ik})^2$$

então, $P_{jk} - V_{ik} = \begin{Bmatrix} 0, se\, Pjk \leq \; Vik \\ \\ Pik \; - Vir\,, > 0 \end{Bmatrix}$

A tipologia cruzada consiste no cálculo da distância assimétrica

Projetos Industriais

Zonas	Classe 1	Classe 2	....	Classe P
Classe 1	D(1,1)	D(1,2)	....	D(1,P)
Classe 2	D(2,1)	D(2,2)	...	D(2,P)
....	.....	...	...	...
Classe V	D(V,1)	D(V,2)	...	D(V,P)

Construções de tipologias simples

Podem ser obtidas as tipologias simples de um paralelo ANAFACO E DYC em qualquer uma das matrizes de incidência. Pela ANAFACO se obtém uma representação:

- das zonas e dos fatores

- dos projetos e dos fatores

Podendo ser visualizados:

- as proximidades entre zonas elementares, entre os fatores, entre zonas elementares e fatores;

- as proximidades entre projetos industriais, entre fatores, entre projetos industriais e fatores.

O programa DYC nos apresenta duas classificações:

- uma classificação tipológica das zonas elementares;

- uma classificação tipológica dos projetos industriais.

Terceiro modelo/métrica euclídea e DAS

As tipologias simples são construídas utilizando os programas PRINCA s DYC. Neste modelo existem três tipos de fatores de localização que enriquecem os conteúdos de informações:

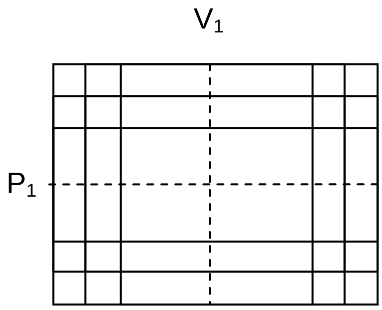
F: fatores comuns às zonas e aos projetos

F_v: fatores específicos das zonas elementares

F_p: fatores específicos dos projetos

5.3.1 - Tipologia cruzada

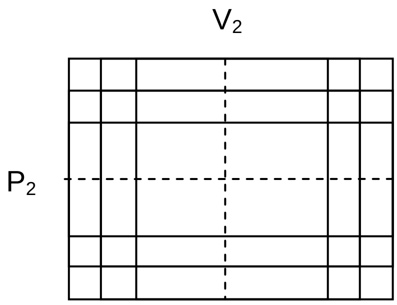
Pode-se construir uma matriz de distância entre classes de zonas elementares e classe de projetos. Calcula-se primeiro os centros de gravidades para todo grupo de zonas e de projetos. A distância DAS é utilizada para calcular a distância entre os centros de gravidade.



V_1 = conjunto das classes das zonas elementares

P_1 = conjunto das classes de projetos

Pode-se construir uma matriz de distância entre classes de zonas elementares e classe de projetos obtidas do resultado das tipologias simples. Calcula-se para isso os centros de gravidade dos diferentes grupos de zonas e diferentes grupos de projetos. Porém, é preciso ter o cuidado de calcular “as componentes dos centros de gravidade somente no que diz respeito aos fatores comuns das zonas e dos projetos.



V_2 = conjunto das classes das zonas elementares

P_2 = conjunto das classes de projetos

5.4 - Modelo Cosenza de Hierarquia Locacional

O modelo proposto por Cosenza introduz as noções básicas para avaliação de alternativas locacionais usando conjuntos fuzzy.

O primeiro passo é confrontar as situações de demanda industrial e as de oferta territorial de fatores gerais (basicamente infraestrutura).

Sejam $A = (a_{ij})_{hxn}$ e $B = (b_{jk})_{nxm}$ matrizes que representam, respectivamente, a demanda industrial de h tipos de empresas relativamente a *n* fatores de localização e a oferta de fatores representada por *m* alternativas locacionais.

Seja $F = \{f_i \mid 1, ..., n\}$ um conjunto finito de fatores gerais de localização denotado genericamente por *f*. Então, o conjunto fuzzy Ã em *f* é um conjunto de pares ordenados:

$\tilde{A} =\{(f, \mu_{\tilde{A}} (f)|f \in F\}$

Ã, é a representação fuzzy da matriz de demanda A onde $\mu_{\tilde{A}}$ (f) representa o grau de importância dos fatores:

Crítico - Condicionante - Pouco Condicionante - Irrelevante

De forma análoga, seja $\tilde{B} = \{(f, \mu_{\tilde{A}} (f))f \quad F \}$ onde $\tilde{B}$ é a representação fuzzy da matriz de oferta B, onde $\mu_b(f)$ representa o grau de atendimento dos fatores ofertados pelas diversas alternativas de localização:

Superior - Bom - Regular - Fraco

A matriz A é uma matriz de requerimento, significando que o conjunto Ã não possui os fatores, apenas explicita os f_i's desejados, pertencentes apenas ao conjunto B, definindo os seus contornos: escalas, níveis de qualidade, disponibilidade e regularidade de atendimento etc.

A matriz B, que contém os f_i's atende A por aproximação. O f_1 do conjunto Ã não é necessariamente igual ao f_1 disponível em $\tilde{B}$. Escolhida um alternativa, Ã assume os valores dos elementos contidos B.

Seja Ã = $\{a_i/i=1, ...,m\}$ o conjunto de demandas dos diferentes tipos de projetos por fatores gerais, ou comuns:

A
Demanda de Fatores por Projetos

	f_1 w_1	f_2 w_2		f_j w_j		f_n w_n
A_1	a_{11}	a_{12}		a_{1j}		a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}		a_{2j}		a_{2n}
...	...	...		...		...
A_i	a_{i1}	a_{i2}		a_{ij}		a_{i1}
A_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mj}		a_{mn}

$A_1, A_2, ..., A_m$: conjunto de demanda dos projetos;

$f_1, f_2, ..., f_n$: conjunto de fatores;

$w_1, W_2, ..., w_n$: importância associada aos fatores.

a_{ij}: Coeficiente fuzzy do projeto i com relação ao fator j (grau de importância do fator para o projeto).

Considerando $B=\{b_k \mid k=1, ...,m\}$ o conjunto de alternativas locacionais onde está contido $F=\{f_k| \ k=1, ...,n\}$, conjunto de fatores comuns a vários projetos ou empresas.

ajj: coeficiente fuzzy do projeto i com relação ao fator j.

B
Oferta de fatores pelas Alternativas Locacionais
Alternativas

		B_1		B_2		B_k		B_m
f_1	W_1	b_{11}		b_{12}		b_{1k}		b_{1m}
f_2	W_2	b_{21}		b_{22}		b_{2k}		b_{2m}
...		...		...		...		...
f_j	w_j	b_{j1}		b_{j2}		b_{jk}		b_{jm}
f_n	w_n	b_{n1}		b_{n1}		b_{nk}		b_{nm}

onde, B_1,B_2, ...,B_m: conjunto de alternativas locacionais;

f_1, f_2, ..., f_n: conjunto de fatores ofertados por B;

w_1, w_2, ..., w_n : nível de oferta dos fatores (capacidade de atendimento aos requerimentos dos projetos)

b_{ik} : coeficiente fuzzy de alternativa k, com relação ao fator $_j$.

5.5 - Operações de Matrizes (Modelo Básico)

Seja $C = A \otimes B = (c_{ik})_{h\times m}$ a matriz representativa das possibilidades de localizações da empresa i na área k de planificação, tal que $\text{máx}_k\{c_{ik}\}=\bar{C}_i$ indica a melhor localização do tipo de projeto i e o máx_i {c¡k) = $\bar{C}_k$ indica o melhor tipo de projeto para a área alternativa k.

Para contornar o problema clássico da distancia assimétrica (DAS), que não possui uma hierarquização rigorosa, e aumentar a precisão do modelo, para os dois elementos genéricos a_{ij} e b_{jk}, o produto $a_{ij} \otimes b_{jk} = c_{ik}$, é executado através da seguinte matriz básica.

Oferta de Fatores (S)

Demanda por fatores (d)

$a_{ij} \otimes b_{jk}$	0	.	.	.	1
0	0^{+}	.	.	.	0^{++}
.		1			
.			1		
.				1	
1	0				1

Onde, c_{ik} é o coeficiente fuzzy da alternativa k com relação ao projeto i e, 0^{+} =1/n! e 0^{++} =1/n (onde, n = número de fatores considerados), são as quantidades limites e definidos como ínfimo e pequenos valores (> 0). Na realidade há um infinito número de valores c_{ik}, no intervalo [0, 1].

Quando $a_{ij} > b_{jk}$, nas matrizes rigorosas o coeficiente fuzzy é zero, quando não há demanda por um determinado fator mas há oferta, os valores fuzzy são superiores a 1 (veja mais a frente as regras operacionais).

As operações $O_d, \otimes O_s \neq 0$ e $O_D \otimes 1_s \neq O$ obedecem aos pressupostos do modelo voltados para a hierarquização das alternativas, não permitindo penalizar uma área que não disponha de um fator não demandado, ou aquela que dispõe de mais fatores que os solicitados, explicitando sua riqueza adicional, podendo atender a outras solicitações e capaz de gerar economias externas.

Para os modelos clássicos, como os de MASTERLI, os fatores considerados para as diversas aplicações são os de maior frequência e de elevado grau de suporte:

a) elementos vinculados ao ciclo de produção;
b) elementos relativos ao transporte;
c) serviços de interesse industrial;
d) comunicações;
e) integração industrial;
f) disponibilidade de mão de obra;

g) energia elétrica (regularidade de suprimentos);

h) água (disponibilidade e regularidade de suprimentos);

i) condições sanitárias;

j) condições gerais de vida para a população;

k) elementos do clima e características do solo;

l) outras restrições e facilidades relativas á implantação de projetos.

No intervalo [0, 1] são incluídos os valores de suporte de A e B, inicialmente identificados como variáveis linguísticas, como se explicita na tabela abaixo:

FATORES	b_{jk} Graus para as alternativas k_i			a_{ij} importância para o projeto
	B_1	B_2	B_3	
f_1	Fraco	Fraco	Superior	Condicionante
f_2	Fraco	Superior	Bom	Crítico
f_3	Bom	Superior	Bom	Crítico
f_4	Fraco	Superior	Bom	Pouco Condicionante
f_5	Regular	Fraco	Fraco	Irrelevante
f_6	Superior	Superior	Superior	Condicionante
f_7	Bom	Bom	Bom	Crítico

a_{ij}: coeficiente fuzzy do grau de importância do fator j com relação ao projeto i e;

b_{jk}: coeficiente fuzzy que resulta do nível do fator disponível na área k;

No modelo COPPE/COSENZA constata-se que os valores de suporte têm suas representatividades em pertinências dadas por um modificador clássico, $\mu_{\tilde{A}\tilde{B}}(x) = [(\sup(x))]^{1/2}$ que aproxima os valores superiores, crucial e condicionante e/ou superior e bom, face a dificuldade dos "*experts*" de distinguirem as suas reais distâncias. Facilita-se a aproximação através de um ***α - cut 0,8*** para compensar desvios que normalmente ocorrem no dimensionamento dos fatores gerais, normalizando-se dentro da estrutura modelar.

"Considerando que os softwares existentes, que são de grande importância acadêmica mas de limitada aplicação prática, os operadores são criados em função de cada realidade e a magnitude de sua complexidade", diz Cosenza.

5.5 - Regras Operacionais

Os operadores mais usados em projetos e pesquisas da COPPE que derivam do modelo COPPE/COSENZA alternativas em diversos ambientes são os que abaixo explicitamos:

i) $\tilde{C}_{ik} = \{0{,}1, \frac{\mu_b(x)-1}{n}\}$

ii) $\tilde{C}_{ik} = \{\mu_{\tilde{b}}(x){,}1, \frac{\mu_b(x)-1}{n}\}$

iii) $\tilde{C}_{ik}$

$a_{ij} \otimes b_{jk}$	A	B	C	D
A	1	0	0	0
B	1+1/n	1	0	0
C	1+2/n	1+1/n	1	0
D	1+3/n	1+2/n	1+1/n	1

iv) $\tilde{c}_{ik}$

Oferta de Fatores (S)

	$a_{ij} \otimes b_{jk}$	0	.	$\mu_{\tilde{B}i}$ (X)	.	1
	0	0^{+}	.	.	.	0^{++}
	.		1		1- $\lfloor \mu\tilde{B}(x) - \tilde{A}(x) \rfloor$	
Demanda por fatores (d)	$\mu_{\tilde{A}i}$ (X)			1		
	.	1- $\lfloor \mu\tilde{B}(x) - \tilde{A}(x) \rfloor$			1	
	1	0	.	.	.	1

i) Matriz de relações de pertinência

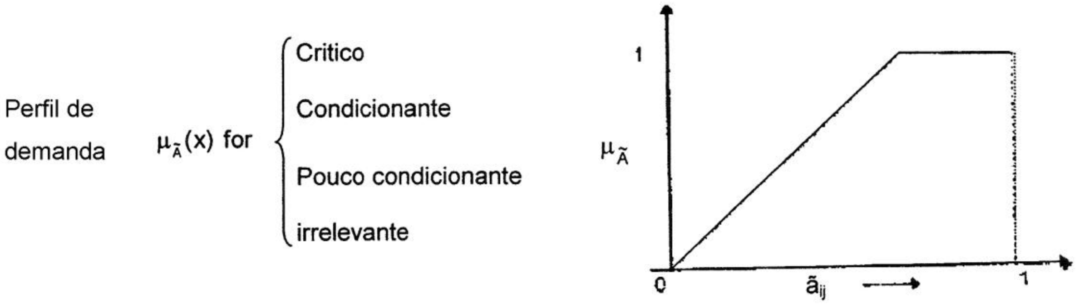
Fraco Regular Bom Ótimo

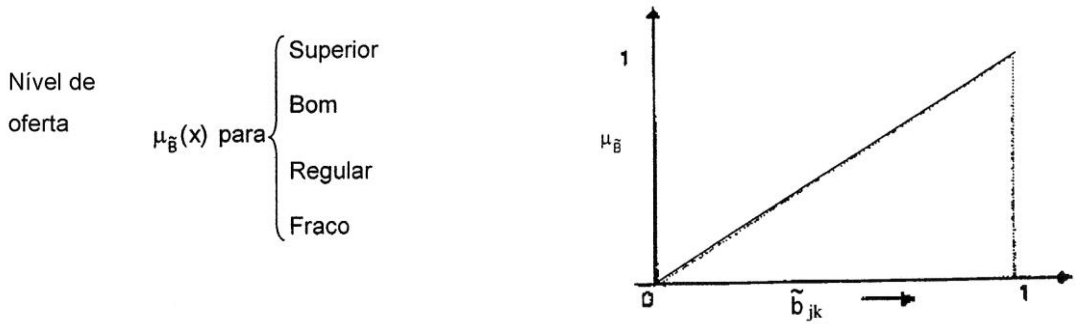
	0	μ_{B1}(X)	μ_{B2}(X)	μ_{B3}(X)	μ_{B4}(X)
0	1/n!	1/(n-1)	1/(n-2)	1/(n-3)	1/n
μ_{A1}(X)	0	1	1+ μ_{B1}(X)/n	1+ μ_{B2}(X)/n	1+ μ_{B3}(X)/n
μ_{A2}(X)	0	μ_{B1}(X)/ μ_{A2}(X)	1	1+ μ_{B1}(X)/n	1+ μ_{B2}(X)/n
μ_{A3}(X)	0	μ_{B1}(X)/ μ_{B3}(X)	μ_{B2}(X)/ μ_{B3}(X)	1	1+ μ_{B1}(X)/n
μ_{A4}(X)	0	μ_{B1}(X)/ μ_{B4}(X)	μ_{B2}(X)/ μ_{A4}(X)	μ_{B3}(X)/ μ_{A4}(X)	1

Operadores intermediários obedecem as regras estabelecidas para o "Princípio de Extensão e Composição de Relações Fuzzy".

5.6 - Espaços Matemáticos

Estabelecem-se as funções de pertinência:pelo lado da demanda MASTERLI, pelo lado da demanda COPPE/COSENZA.





Fatores Específicos - Operação “Crisp”.

Seja $\bar{A}*$ = $(\bar{a}*_{ij})_{m\times n}$ a matriz de demanda industrial de *m* tipos de industrias relativa a *n'*, fatores específicos de localização.

Para a finalidade da matriz A* todos os fatores nela contidos são considerados críticos e, para atividades voltadas para as matérias-primas, ou recursos naturais.

Seja $\tilde{A}*$ = { f, $\mu_{\tilde{A}} * (f) \epsilon F$ } a representação fuzzy da matriz A*.

Seja B* = $[bij]_{n.m}$ a matriz de oferta territorial de n' fatores específicos de localização dos i tipos de empresas voltadas para recursos específicos ou para uma outra condicionante específica qualquer.

Então, C* = $\widetilde{A} \oplus \widetilde{B} = [\,\tilde{c}*_{ik}\,]_{hxm}$

onde: $\tilde{c}*_{ik}$ = coeficiente fuzzy

Seja $\Gamma = [\Upsilon_{ik}]_{m\times q}$ = c $\oplus$ c*, a agregação dos coeficientes (operação gama). Para as atividades voltadas para recursos específicos críticos, a operação gama é executada pela seguinte regra operacional:

γ_{ik}

c^*_{ik} \ c_{ik}	>0	0
0	0	0
>0	$c_{ik}+c^*_{ik}$	c^*_{ik}

Em modelagem recente, Cosenza corpora e distingue os conjuntos {0}, { } e { ∄ }, respectivamente zero, vazio e não existente.

A matriz $\lambda = [\lambda_{ij}]_{mxn\Sigma}$ resulta de A_{mxn}, ∪ $A^*_{mxn'}$, que define o perfil da demanda para efeito de localização. Onde,

$n_{\Sigma} = n + n'$

Seja $\varepsilon = (\varepsilon_{il})$h x h a matriz diagonal, tal que $\varepsilon_{il} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq l \\ \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n\Sigma} a_{ij}}, & \text{se } i = l \end{cases}$

Defina-se, ainda, $\Delta = [\,\varepsilon\ x\ \sum_{j=1}^{n\Sigma} b_{jk}] = [\,\delta_{ik}]$ como a matriz representativa das possibilidades de localização dos h tipos de empresas nas m alternativas, agora representados por índices em relação aos fatores de localização demandados. Ou seja, cada elemento δ_{ik} da matriz representa localizações, hierarquizando as regiões por projetos.

δ_{ik} = 1 a área k atende a demanda no nível requerido

δ_{ik} < 1 significa que pelo menos um fator demandando não foi atendido

δ_{ik} > 1 a área k oferece mais condições do que as demandas.

Uma versão crisp deste modelo é utilizada para a comparação com um modelo fuzzy na localização de um posto fluviométrico.

5.7 - Métodos Fuzzy de Decisão multicritério para a seleção da melhor localização de uma cidade produtiva de Liang e Wang

O algoritmo criador é baseado nos conceitos da lógica fuzzy e na análise da estrutura hierárquica para agregar as avaliações linguísticas dos *experts* para tomada de decisão.

O trabalho supre a existência de um comitê formado por *n experts,* que pretendem analisar a importâncis de *K* critérios (C_1, C_2, ..., C_k) é a adequação das *m* alternativas locacionais (a_1, A_2, ..., A_n) em relação a cada critério.

Para a avaliação da importância de cada critério foi definido um conjunto linguístico, W, W={VL, L, M, H, VH} onde VL = very low, L = low, M = medium, H = high e VH = very high.

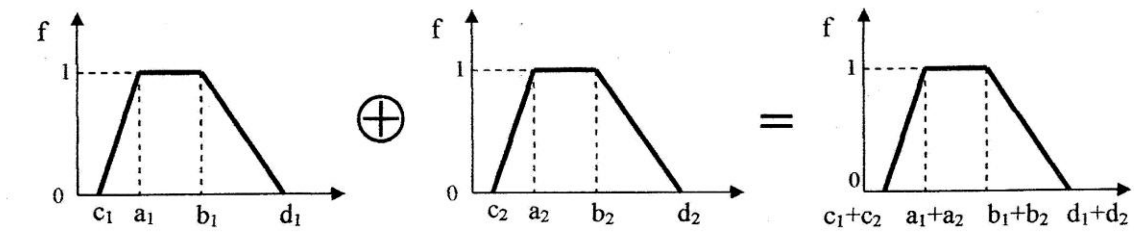
A estrutura modelar básica utilizada por Gin-Shuh Liang e Mao-Jin J. Wang, foi a desenvolvida por Yaw-Chu Chen.

Cada "*expert"* deverá estabelecer um peso para cada critério de acordo com o conjunto linguístico considerado. A partir daqui Liang e Wang utilizam os números fuzzy para o conjunto W.

Para a avaliação da adequação de cada localidade e relação à cada critério de seleção foi definido conjunto linguístico: S = {VP, B.VP&P, P, B.P& F, F, B.F & G, G, B.G & V.G, VG}, onde: VP = very poor, B.VP&P = between very poor and poor, P = poor, BP&F = between poor and fair, F = fair, B.F&G = between fair and good, G = good, B.G & V.G = between good and very good, VG = very good. Para o critério, cada "*expert"* deverá decidir qual o valor de S deverá ser atribuído à cada localidade. Os números fuzzy para o conjunto W são identificados pela álgebra de Chen.

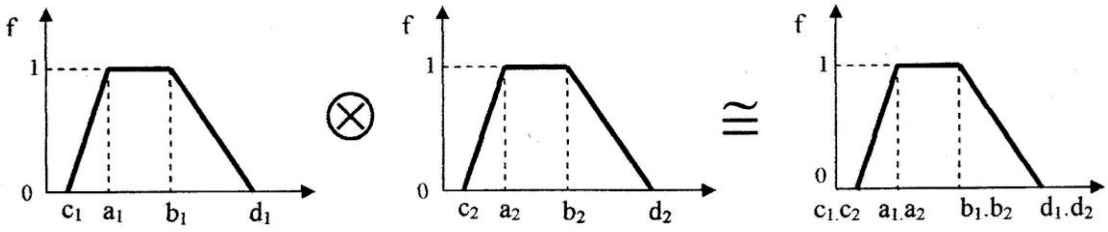
As operações algébricas são utilizadas para agregação dos pesos (W_t) e dos graus (S_{jt}) de disponibilidade ou adequabilidade dos critérios nas alternativas considerando todos os *n* decisores, bem como a obtenção do "índice fuzzy de adequabilidade" (F_i) foram basicamente adição $\oplus$ e multiplicação $\otimes$ envolvendo números fuzzy com funções de pertinência trapezoidais.

A adição $\oplus$ de dois números fuzzy é dada por:



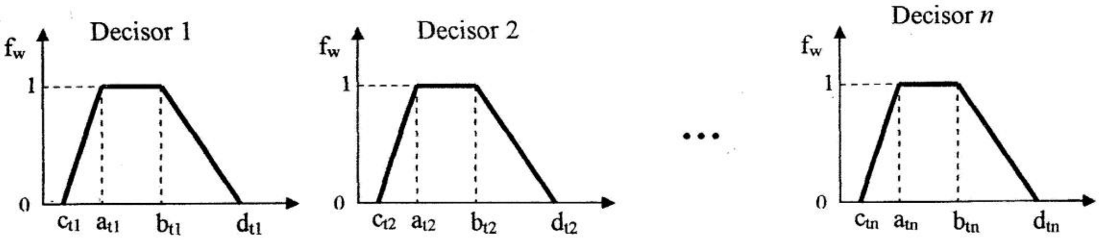
$$(c_1 \quad a_1 \quad b_1 \quad d_1) \oplus (c_2 \quad a_2 \quad b_2 \quad d_2) = (c_1 + c_2 \quad a_1 + a_2 \quad b_1 + b_2 \quad d_1 + d_2)$$

A multiplicação $\otimes$ de dois números fuzzy é dada por;



$$(c_1 \ \ a_1 \ \ b_1 \ \ d_1) \otimes (c_2 \ \ a_2 \ \ b_2 \ \ d_2) \cong (c_1 . c_2 \quad a_1 . a_2 \quad b_1 . b_2 \quad d_1 . d_2)$$

Agregação para obtenção dos pesos finais W_t de cada critério t:



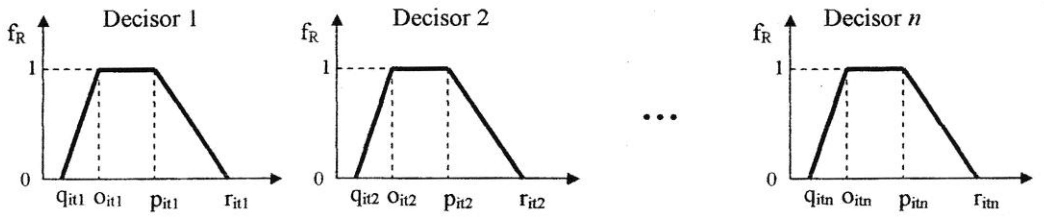
$$W_{t1} = (c_{t1} \quad a_{t1} \quad b_{t1} \quad d_{t1}) \qquad W_{t2} = (c_{t2} \quad a_{t2} \quad b_{t2} \quad d_{t2}) \qquad \ldots \qquad W_{t2} = (c_{tn} \quad a_{tn} \quad b_{tn} \quad d_{tn})$$

$W_{t1} = (c_{t1} \ \ a_{t1} \ \ b_{t1} \ \ d_{t1})$ $\qquad$ $W_{t2} = (c_{t2} \ \ a_{t2} \ \ b_{t2} \ \ d_{t2})$ $\qquad$ ... $\qquad$ $W_{t2} = (c_{tn} \quad a_{tn} \quad b_{tn} \quad d_{tn})$

$$W_t = \left(\sum_{j=1}^{n} c_{tj} / n \quad \sum_{j=1}^{n} a_{tj} / n \quad \sum_{j=1}^{n} b_{tj} / n \quad \sum_{j=1}^{n} d_{tj} / n \right) = (c_t \quad a_t \quad b_t \quad d_t) \qquad t = 1,2,\ldots,k$$

Ou seja: $W_t = (1/n) \otimes [\, W_{t1} \oplus W_{t2} \oplus \ldots \oplus W_{tn}]$

Agregação para obtenção dos graus (S_{it}) de disponibilidade do critério t na alternativa i :



$$S_{it1} = (q_{it1} \quad o_{it1} \quad p_{it1} \quad r_{it1}) \quad S_{it2} = (q_{it2} \quad o_{it2} \quad p_{it2} \quad r_{it2}) \quad \cdots \quad S_{itn} = (q_{itn} \quad o_{itn} \quad p_{itn} \quad r_{itn})$$

$$S_{it} = \left(\sum_{j=1}^{n} q_{itj}/n \quad \sum_{j=1}^{n} o_{itj}/n \quad \sum_{j=1}^{n} p_{itj}/n \quad \sum_{j=1}^{n} r_{itj}/n \right) = (q_{it} \quad o_{it} \quad p_{it} \quad r_{it}) \ t = 1,2,\dots,k \ \text{e} \ i = 1,2,\dots,m$$

Ou seja: $S_{it} = (1/n) \otimes [\, S_{it1} \oplus S_{it2} \oplus \dots \oplus S_{itn}]$

Agregação para obtenção "índice final de adequabilidade" (F_i) de cada alternativa A_i:

O "índice final de adequabilidade" F_i de cada alternativa A_i pode ser obtido pela agregação(soma) do produto $S_{it} \otimes W_t$ para todos os critérios de seleção. Divide-se a soma então pelo número de critérios k.

Em forma algébrica: $F = (1/k) \otimes [(S_{i1} \otimes W_1) \oplus (S_{i2} \otimes W_2) \oplus \dots \oplus (S_{ik} \otimes W_k)]$

Em forma matricial: $\begin{bmatrix} F1 \\ F2 \\ . \\ . \\ . \\ F3 \end{bmatrix} = 1/k \otimes$

Onde:

i = 1,2,...m onde m é número de alternativas; k é o número de critérios.

Índice Final de Adequabilidade F_i

O índice final de adequabilidade F_i obtido para cada alternativa A_i, é um número fuzzy obtido pela agregação dos números fuzzy W_t e S_{it} conforme exposto anteriormente. Como os números fuzzy W_t e S_{it}, são trapezoidais, pelo princípio da extensão proposto por Zadeh, o número fuzzy F_i terá a seguinte função de pertinência:

$$f_{Fi}(x)=\begin{cases} -H_{i1}+\left[H_{i1}^2+(x-Y_i)/T_{i1}\right]^{1/2} & Y_i \le x \le Q_i \\ & Q_i \le x \le R_i \\ H_{i2}^2+(x-Z_i)/U_{i1}\big]^{1/2} & R_i \le x \le Z_i \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases} \qquad \text{para } i = 1,2, \ldots, m$$

onde:

$$T_{i1} = \sum_{t=1}^{k}(o_{it}-q_{it})\cdot(a_t-c_t)/k$$

$$T_{i2} = \sum_{t=1}^{k}\left[q_{it}(a_t-c_t)+c_t(o_{it}-q_{it})\right]/k$$

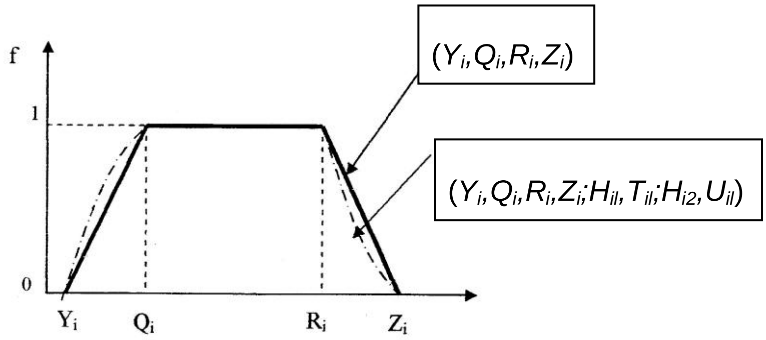
$$U_{i1} = \sum_{t=1}^{k}(r_{it}-p_{it})\cdot(d_t-b_t)/k$$

$$U_{i2} = \sum_{t=1}^{k}\left[d_t(p_{it}-r_{it})+r_{it}(b_i-d_i)\right]/k$$

$$H_{i1} = T_{i2}/(2T_{i1}) \qquad H_{i2} = -U_{i2}/(2U_{i1})$$

$$Y_i = \sum_{t=1}^{k} q_{it}\cdot c_t/k \qquad Q_i = \sum_{t=1}^{k} o_{it}\cdot a_t/k$$

$$R_i = \sum_{t=1}^{k} p_{it}\cdot b_t/k \qquad Z_i = \sum_{t=1}^{k} r_{it}\cdot d_t/k$$



Função de pertinência do número fuzzy F_i (trapezoidal e não trapezoidal)

Conforme observado, índice final de adequabilidade F_i não é um número fuzzy trapezoidal exatamente. Ele pode ser expresso por: $F_i = (Y_i,Q_i,R_i,Z_i;H_{il},T_{il};H_{i2},U_{il})$

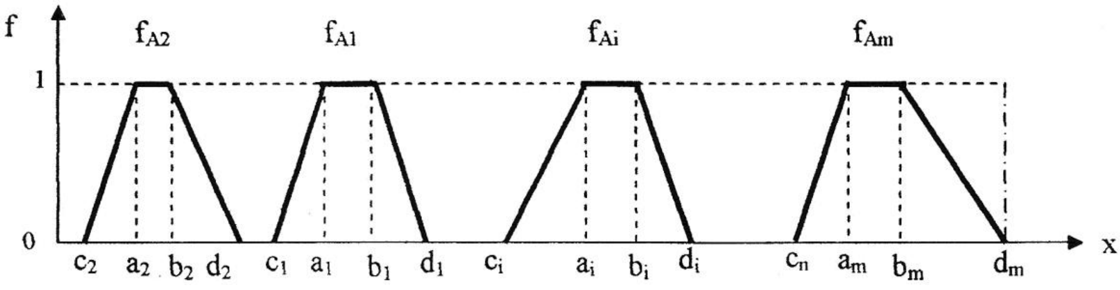
Por simplicidade o número fuzzy acima pode ser aproximado para um número fuzzy trapezoidal, dado por: $F_i = (Y_i,Q_i,R_i,Z_i)$

Método para Ordenação dos Índices de Adequabilidade

De acordo com o principio da extensão proposto por Zadeh em 1965, os índices finais de adequabilidade F_i obtidos para alternativa A_i, são também números fuzzy, pois são obtidos pela operação de outros dois números fuzzy - W_t e S_{it}.

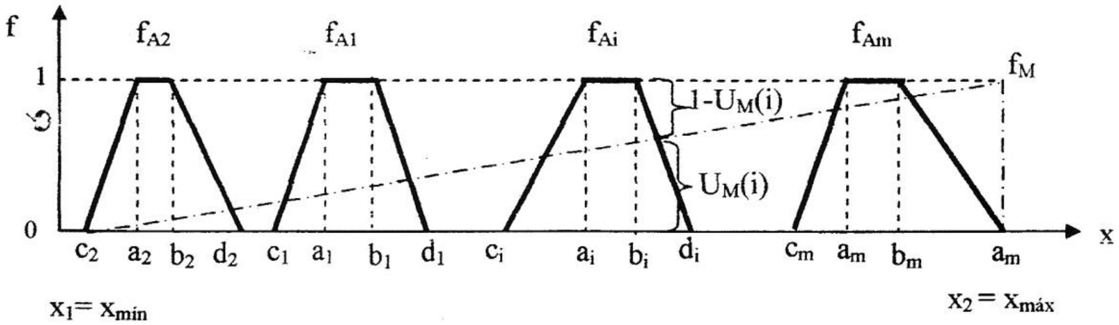
O método proposto por Chen é explicado a seguir:

Suponha que se queira ordenar m números fuzzy $A_1, A_2, ...,Am,$ cada qual com sua função de pertinência $f_{Ai}(x)$, $i= 1,2,...,m,$ com x pertencendo ao espaço R.



Maximização e utilidade à direita

Este método foi proposto inicialmente por Jain e trabalha com o lado direito da função de pertinência do número fuzzy (correspondente aos maiores valores do número fuzzy).



Jain definiu o conjunto maximização (*maximizing set*) como:

M = {$(x,f_M(x))$ / $x \in R$} onde:

$[(x - x_{min})/(x_{máx} - x_{min})]^k$ para $x \in$ suporte S

$f_M(X) = 0$

onde $x_{máx} = sup\ S$ *(máximo valor de S)* e $x_{min} = inf\ S$ *(mínimo valor de S)*, sendo S = $\bigcup_{i=1}^{n} S_i$ e S_i igual ao conjunto suporte de A_i.

O valor de *k* pode variar de acordo com o problema. No caso do artigo utilizou-se k=1.

O valor de ordenação para cada alternativa A_i pode ser calculado então pela expressão:

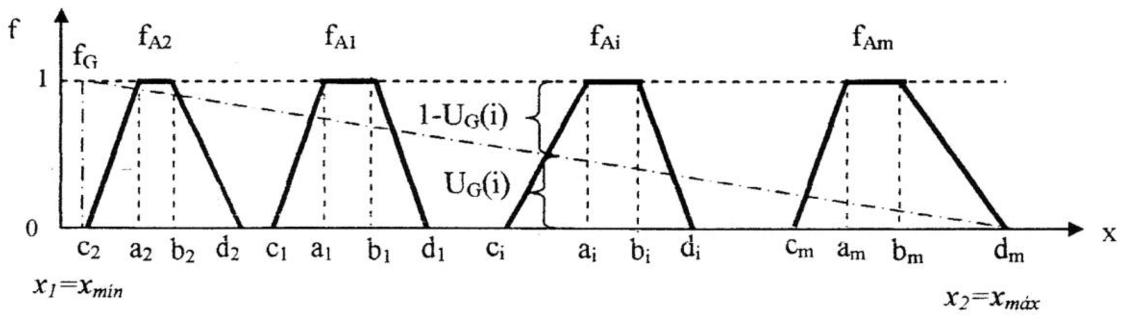
$U_M(i) = sup(f_M(x) \wedge f_{Ai}(x))$ *onde i= 1,2,...,m*

O valor $U_M(i)$ corresponde, portanto, ao Máximo valor da interseção entre as funções de pertinência f_M e f_{Ai}. Quanto maior é o valor de $U_M(i)$ maior é o número fuzzy.

Minimização e utilidade à esquerda

Este método foi proposto por Chen para ser aplicado juntamente com o método *maximizing set* proposto inicialmente por Jain, pois conforme demonstrado por Chen, para alguns casos, utilizar-se somente o lado direito da função de pertinência pode não apresentar bons resultados.

O *minimizing set* trabalha com o lado esquerdo da função de pertinência do número fuzzy (correspondente aos menores valores do número fuzzy).



Chen definiu o conjunto minimização (*minimizing set*) como:

G = {(x, $f_G(x)$ / $x \in$ a R)} onde:

$$f_G(x) = \begin{cases} [(x - x_{máx})/(x_{mín} - x_{máx})]^k & x_{mín} \le x \le x_{máx} \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

O valor de *k* pode variar de acordo com o problema. No caso do artigo utilizou-se *k*=1.

O valor de ordenação para cada alternativa A_i, pelo *minimizing set*, pode ser calculado então pela expressão:

$U_G(i)=sup(f_G(x) \wedge f_{Ai}(x))$ onde $i=1,2,..,,m$

O valor $U_G(i)$corresponde, portanto, ao máximo valor da interseção entre as funções de pertinência f_M e f_{Ai}. Quanto menor é o valor de $U_G(i)$ maior é o número fuzzy.

Maximização e Minimização

Chen propôs, então, trabalhar com os dois valores $U_M(i)$ e $U_G(i)$ para ordenar números fuzzy.

O valor $U_T(i)$ para ordenação dos números fuzzy é dado pela expressão:

$U_T(i) = [U_M(i) + 1 - U_G(i)]/2$

O valor de ordenação $U_T(i)$ para o índice final de adequabilidade F_i expresso por:

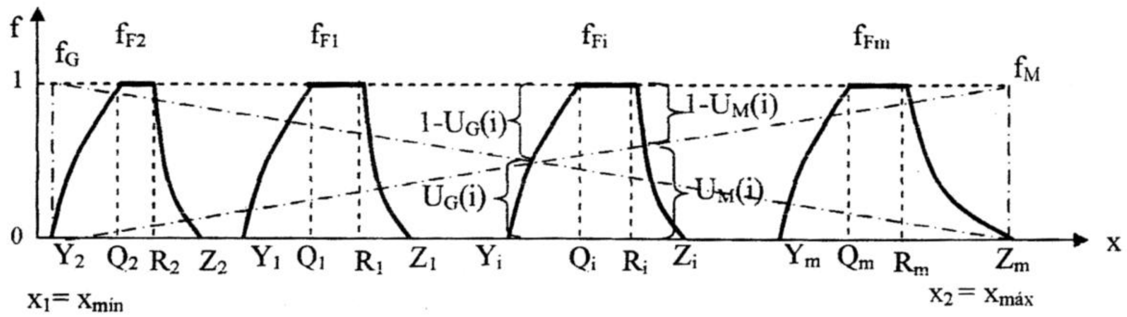
$F_{i\,=}$ $(Y_i,Q_i,R_i,Z_i;H_{il},T_{il};H_{i2},U_{il})$, será:

$U_T(Fi) = [\ H_{i2} -(H^2_{i2} +(x_R - Z_i)/U_{il})^{1/2} + 1 + H_{il} -(\ H^2_{il} +(x_L - Y_i)/T_{il})^{1/2}]/2$

onde:

$X_R = \{2X_1 + 2H_{i2}(X_2-x_1)+(X_2-X_1)^2/U_{il} - (X_2-X_1).[(2H_{i2} + (X_2-X_1)/\ U_{il})^2 +4(x_2-Z_i)/U_{il}]^{1/2}\}/2$

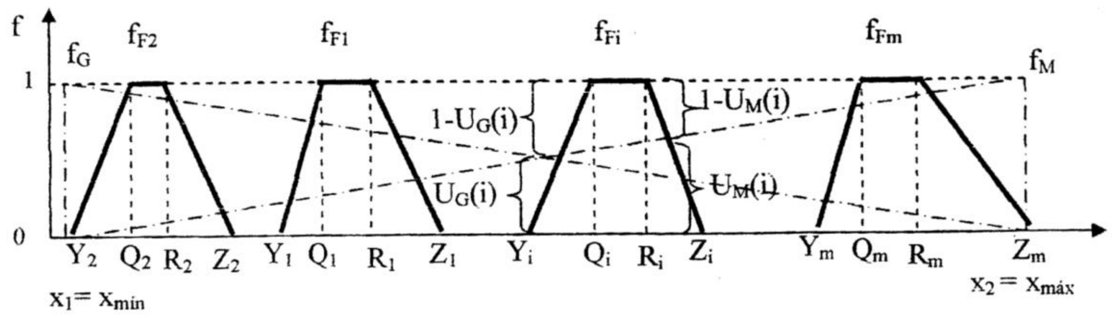
$X_L = \{2X_2 + 2H_{i1}(x_2-x_1)+(X_2-X_1)^2/T_{il} - (X_2-X_1).[(2H_{il} + (X_2-X_1)/\ T_{il})^2 +4(x_2-Y_i)/T_{il}]^{1/2}\}/2$



O valor de ordenação $U_T(i)$ para o índice final de adequabilidade F_i expresso por:

$F_{i\,=}$ (Y_i,Q_i,R_i,Z_i), será:

$U_T(Fi) = [(\ Z_i - x_1)/((x_2-x_1)-(R_i - Z_i)) + 1- (x_2-Y_i)/((\ x_2-x_1)+(Q_i - Y_i))]/2$



Finalmente chega-se a ordenação dos números fuzzy para a avaliação dos tomadores de decisão.

$F_i > F_j \leftrightarrow U_T(F_i) > U_T(F_j)$

$F_i > F_j \leftrightarrow U_T(F_i) = U_T(F_j)$ *e* $(Q_i + R_i) > (Q_j - Y_j)$

$F_i = F_j \leftrightarrow U_T(F_i) = U_T(F_j)$ *e* $(Q_i + R_i) = (Q_j - Y_j)$

Para aprofundamento desse estudo recomenda-se a leitura do artigo "A Fuzzy Muli-Criteria Decision Making Method for Facility Site Selection, Int. J. Prod, Res. 1991, VM 29 n° 11,2313-2330.

6 - CONCLUSÕES

As teorias clássicas da localização tiveram papel crucial no desenvolvimento da análise locacional e espacial na medida em que introduziram a variável espaço no equacionamento de modelos econômicos. E, ainda hoje, constituem uma contribuição indispensável a decisão locacional, ao planejamento regional e a novos estudos da questão espacial (Walter Isard. teórico e membro da Regional Science Association, por exemplo, é um continuador das análises de Weber e Lösch). As análises, a estruturação dos modelos e dos fatores locacionais auxiliam na avaliação de vantagens e desvantagens locacionais de cada indústrias e no estudo do padrão de organização do espaço.

Ainda que novos fatores locacionais tenham surgido em consequência de um alto nível de desenvolvimento tecnológico, a distribuição dos recursos naturais, as condições de fertilidade do solo ou os custos de transporte, por exemplo permanecem como fatores que podem nortear a localização de uma atividade econômica.

A base deste quadro de contribuições clássicas pode ser composta por três obras: os modelos de Thünen, Weber e Christaller. Estes abrangem os três setores da atividade econômica (o primário, o secundário e o terciário, respectivamente) e foram elaborados a partir de concepções originais.

Palander e Lösch ampliam os questionamentos e formulações anteriormente propostas. Este último fecha a história da teoria econômica espacial clássica.

Lösch produz uma síntese geral das contribuições anteriores e postula alguns desenvolvimentos novos que orientarão trabalhos posteriores. Depois de August Lösch seria difícil ordenar cronologicamente os novos ensaios referentes a questão espacial integrante da Economia Espacial cujos fundamentos residem na "Teoria da Localização". Destaca-se a importância da utilização das estruturas modulares fuzzy, que se permitem a aplicação em vários campos onde o rigor de hierarquia é uma imposição.

Como dito na introdução um dos objetivos do trabalho foi construir uma sequência lógica reunindo trabalhos dispersos e desconectados.

Desconectados de suas origens teóricas das fases em que os recursos matemáticos de suporte as teorias espaciais ainda se apoiavam em Laplace, Lagrange, Legendre, Carnot, em definição de espaços em Monge, nas algebras de Condorcet, etc.. Gigantes da matemática que tratavam os fenômenos sem o envoltório de suas complexidades. A vagueza e a imprecisão que caracterizavam a maioria dos fenômenos sociais exigiam um outro tratamento metodológico. As cadeias cognitivas com suas imprecisões e vaguezas não permitiam uma aproximação do real. Como extrair do especialista a informação correta e como tirar dos dados e informações conotações estranhas e ideológicas? A informação sobre os elementos que entram nas estruturas matriciais, suas maganitudes, regularidades de comportamento, seus graus de importância para atender perfis de requisitos que grau de realidade poderiam ter?

A base da teoria matemática que aqui se apresenta mostra como se pode abranger a maior parte da complexidade do sistema sem uma rigorosa precisão matemática.

Tenta-se aqui mostrar uma evolução do pensamento a da teoria da organização do espaço, das escassas relações da teoria com as matemáticas utilizadas, que somente permitiam inferências quase pontuais e o surgimento de uma aritmética qua trabalha com a estrutura do pensamento humano, capaz de introduzir num servo-mecanismo a inteligência e conhecimento dos melhores especialistas em áreas diversas e filtrar as vaguezas e imprecisões dos dados e informações criando e analisando espaços matemáticos através dos graus de pertinência dos elementos constituintes dos conjuntos fuzzy. Os números fuzzy foram apresentados no algoritmo de Chen mostrando recursos notáveis para a hierarquização de áreas homogênas ou programas. Os modelos MASTERLI e COPPE/COSENZA tem uma abrangência maior, trabalhando com estruturas matriciais que se diferenciam pelos algoritmos e algebras matricias, estas não comutativas no modelo COPPE/COSENZA. O primeiro usa álgebra euclidia e a métrica de Benzecry, o segundo algoritmos especiais na álgebra das relações fuzzy.

Esse foi um desafio proposto pelo orientador, estudar as bases teóricas dos modelos e juntá-los para uma inferência de uma "quase competitividade" na escolha para estudos locacionais e outros quaisquer que necessitam de hierarquias rigorosas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CHEN, S. H., 1985, Ranking Fuzzy Numbers with Maximizing Set and Minimizing Set Fuzzy Sets and System, 17, 113-129.

CHEN, Yaw-Chu and CHANG, Kuei-Lun, 2006, Applying Fuzzy Multi-Criteria Decision Method to Evaluate Key Capabilities of Taiwan Motion Picture Companies. Joint Conference on Information Sciences (JCIS) (conf/jcis/2006)

CLEMENTE, Ademir, 1994, Economia Regional e Urbana. Editora Atlas, São Paulo.

COSENZA, Carlos Alberto Nunes, 1994, Localização Industrial: Delineamento de uma Metodologia para a Hierarquização das Potencialidades Regionais. Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

COSENZA, Carlos Alberto Nunes, RHEINGANTZ, Paulo Afonso, ROCHA, Anna Carla de M., LIMA, Fernando Rodrigues, 2000, Modelo de Análise Hierárquica COPPETEC-Cosenza na Avaliação do Desempenho dos Edifícios de Escritórios, NUTAU'2000. São Paulo: FAUUSP.

COSENZA, Carlos Alberto Nunes, ROCHA, Anna Carla de M., 1997, Teoria dos Conjuntos Fuzzy: Comparação Introdutória como a Teoria Clássica de Conjuntos. Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

COSENZA, Carlos Alberto Nunes, TOLEDO, Olga Moraes, 2003, Um Caso de Aplicação da Lógica Fuzzy – O Modelo COPPE-Cosenza de Hierarquia Fuzzy. in: XXIII Encontro Nacional de Engenharia de Produção - Ouro Preto, MG, Brasil.

COSENZA, Carlos Alberto Nunes, VALDIVIEZO VIEIRA, L.E., 1996, Modelo do Confronto Entre Requerimentos e Satisfação de Critérios para Problemas Multicriteriais Discretos, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

COSENZA, Carlos Alberto Nunes, 1981, Industrial Location Model: A Proposal. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

COSENZA, Carlos Alberto Nunes, NASCIMENTO, Paulo R., 1975, Pesquisa Planejamento Econômico, Brasil.

DUBOIS, D. and H. Prade, 1978, Operations of Fuzzy Numbers, Internat. J. Systems Science 9, 613-626.

GADELHA, E.V., 1998, Análise do Processo de compra de Localidades; um estudo de Casos das empresas Mercedes-Benz, Volkswagen e General Motors no Brasil, M.Sc., COPPEAD/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

GERTNER, R.K, 2000, A Decisão de Localização Industrial em Mercados Globalizados: Uma Aplicação do Modelo Cosenza. Tese de D.Sc. Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

HADDAD, P. R. et al., 1989, Economia Regional - Teoria e Métodos de Análise. Fortaleza, Banco do Nordeste do Brasil.

HOLANDA, Nilson. Planejamento e Projetos. Fortaleza, Edições UFC, 1983, p. 203 e 205.

HUMPHREY, John, 2000, Global Strategy and Local Realities: The Auto Industryin emerging markets, GERPISA, França.

LAM, Bruno, SELDIN, Renata, Modelos de Localização – Teoria e Relevância para as Indústrias, Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

LIANG, Gin-Shun and Mao-Jiun J. Wang, 1991, A Fuzzy Multi-Criteria Decision-Making Method for Facility Site Selection, Int. J. Prod. Res., vol. 29, n° 11, 2313-2330.

PACHECO, Carlos A., 1999, Novos Padrões de Localização Industrial? Tendências Recentes dos Indicadores da Produção e do Investimento Industrial. Brasília.

PORTER, M.E., 1990, Competition in Global Industries, HBS, Boston, USA.

SAATY, T.J., 1980, The Analitic Hierarchy Process, New York, McGraw-Hill.

SCHONER, B. and W.C. Wedley, 1989, Ambiguous Criteria Weights in AHP: Consequences and Solutions, Decision Sci., vol. 20, pp.462475.

SILVA, Elvis Magno da, ARANGO Héctor Gustavo, GUSMÃO, Denilson Fábio, 2009, Fatores Locacionais: Uma Visão dos Executivos do Setor Industrial da Região do Alto Sapucaí, Minas Gerais, V CONGRESSO NACIONAL DE EXCELÊNCIA EM GESTÃO, Niterói, RJ, Brasil.

SOUSA, Filipe Lage de, 2004, A Localização da Indústria de Transformação Brasileira nas Últimas Três Décadas, ANPEC, (BNDES).

VEREECKE, A., DE MEYER, A., VAN DIERDONCK, R., 2008, The Strategic Role of the Plant in international Networks: a Longitudinal Study. Judge Business School, University of Cambridge, England.

WEBER, A., 1971, Theory of the Location of Industries. New York: Russell & Russell.