



## COLORAÇÃO TOTAL EQUILIBRADA EM SUBFAMÍLIAS DE GRAFOS REGULARES

Angelo Santos Siqueira

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Produção.

Orientador: Samuel Jurkiewicz

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2011

COLORAÇÃO TOTAL EQUILIBRADA EM SUBFAMÍLIAS DE GRAFOS REGULARES

Angelo Santos Siqueira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO.

Examinada por:

---

Prof. Samuel Jurkiewicz, Dr. Math.

---

Prof. Abel Rodolfo Garcia Lozano, D.Sc.

---

Profª Luciana Prado Mouta Pena, D.Sc.

---

Prof. Luiz Nélio Henderson Guedes de Oliveira, D.Sc.

---

Prof. Paulo Oswaldo Boaventura Netto, Dr. Ing.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
DEZEMBRO DE 2011

Siqueira, Angelo Santos

Coloração Total Equilibrada em Subfamílias de Grafos Regulares/ Angelo Santos Siqueira. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2011.

X, 102 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Samuel Jurkiewicz

Tese (doutorado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia de Produção, 2011.

Referências Bibliográficas: p. 98-102.

1. Coloração Total Equilibrada. 2. Produto Funcional de Grafos. 3. Grafos Regulares. I. Jurkiewicz, Samuel. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Produção. III. Título.

*À Amelia (minha mãe), Fábria  
(minha esposa), Gaspar (meu  
pai), Marcio (meu irmão) e  
Thiago (meu filho)*

## Agradecimentos

Antes de tudo, agradeço a Deus que me deu força e me sustentou a cada dia. Sem Ele nada disso seria possível.

À minha esposa Fábiana, por sua compreensão, paciência e apoio, principalmente depois que chegou o Thiago, maior presente de nossas vidas.

Aos meus pais, Amelia e Gaspar, e meu irmão Marcio, por tudo. Certamente, este trabalho é muito mais de vocês do que meu. Obrigado!

À minha vó Luiza, tios e demais familiares, que mesmo de longe torceram por mim.

Ao Prof. Abel, pela excelente orientação recebida, e acima de tudo pela amizade construída nestes anos.

Ao Prof. Samuel, pela orientação recebida, principalmente na fase final deste trabalho.

Ao Prof. Valdir, pela recepção ao chegar nesta instituição, e principalmente, pela amizade estabelecida ao longo do tempo.

Aos Professores Boaventura, Nélio e Luciana por aceitarem fazer parte desta banca, abrilhantando este momento.

Aos Professores Gaspar, Valessa e Lana, pela excelente revisão e sugestões feitas no decorrer do texto.

Aos Professores da Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades, pelo apoio, principalmente nas horas mais difíceis.

À Secretária de PO Andréia pela ajuda durante o período que estive vinculado a Coppe.

À Universidade do Grande Rio, pelo incentivo e apoio recebido para os estudos.

À Coppe – Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia.

À Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## COLORAÇÃO TOTAL EQUILIBRADA EM SUBFAMÍLIAS DE GRAFOS REGULARES

Angelo Santos Siqueira

Dezembro / 2011

Orientador: Samuel Jurkiewicz

Programa: Engenharia de Produção

Área: Pesquisa Operacional

No presente trabalho, fez-se inicialmente uma revisão dos conceitos de coloração de vértices, coloração de arestas, coloração total e coloração total equilibrada, além de apresentar um conceito recente chamado de coloração de vértices com folga de ordem  $k$ . Em seguida, tomando como base o produto cartesiano de grafos, definiu-se o produto cartesiano para digrafos, o que propiciou a inserção de um novo tipo de produto de grafos, chamado aqui de produto funcional. A partir deste produto, gerou-se uma família de grafos regulares, que podem ser coloridos com folga de ordem  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores. Provou-se ainda que se um grafo regular pode ser colorido com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores, então sua coloração total é equilibrada. Em seguida, mostrou-se que esta família é suficientemente grande, isto é, que pode ser estendida preservando a regularidade e a coloração equilibrada. O trabalho termina com uma aplicação sobre coloração total equilibrada em redes de interconexão.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## EQUITABLE TOTAL COLORING IN SUBFAMILIES OF REGULAR GRAPHS

Angelo Santos Siqueira

December / 2011

Advisor: Samuel Jurkiewicz

Department: Production Engineering

Area: Operational Research

This study, was originally a review of the concepts of vertex coloring, edge coloring, total coloring and equitable total coloring and also presents a new concept called a range coloring of order  $k$ . Then, based on the cartesian product of graphs, it was defined for the cartesian product of digraphs, which led to the inclusion of a new kind of product of graphs, here called functional product. From this product, there has been a family of regular graphs, which can be colored with range of order  $\Delta$  with  $\Delta + 1$  colors. It was also proved that a regular graph can be colored with range of order  $\Delta$  with  $\Delta + 1$  colors, then your total coloring is equitable. Then it was shown that this family is large enough, that means it can be extended while preserving the regularity and the equitable coloring. The work ends with an application to equitable total coloring in interconnect networks.



# Sumário

<b>1. Conceitos Básicos</b>	<b>1</b>
1.1. Introdução . . . . .	1
1.2. Um Breve Histórico . . . . .	2
1.3. Motivação e Objetivos do Trabalho . . . . .	3
1.4. Organização do Trabalho. . . . .	5
1.5. Definições. . . . .	6
<b>2. Extensão Natural de uma Coloração com Folga de Ordem <math>\Delta</math></b>	<b>17</b>
2.1. Introdução . . . . .	17
2.2. Coloração de Vértices, de Arestas, Total e Total Equilibrada . . . . .	18
2.3. Coloração de Vértices com Folga . . . . .	22
2.4. Extensão Natural de uma Coloração com Folga de Ordem $\Delta$ . . . . .	24
<b>3. Produto Funcional de Grafos</b>	<b>31</b>
1.1. Introdução . . . . .	31
1.2. Produto Cartesiano de Grafos e Digrafos . . . . .	32
1.3. Produto Funcional de Grafos. . . . .	34
<b>4. Coloração Total Equilibrada em Subfamílias de Grafos Regulares</b>	<b>44</b>
4.1. Introdução . . . . .	44
4.2. Rotação . . . . .	44
4.3. Grafo Suporte. . . . .	46
4.4. Principais Resultados. . . . .	47

<b>5. Coloração Total Equilibrada e Redes de Interconexão</b>	<b>66</b>
5.1. Introdução . . . . .	66
5.2. Redes de Interconexão e Representação de Redes do Tipo Ponto-a-Ponto . . . . .	67
5.3. Coloração Total Equilibrada, Processamento e Transmissão de Dados. . . . .	68
5.4. Um Algoritmo de Comunicação com Base na Coloração Total Equilibrada. . . . .	69
5.5. Principais Topologias de Redes de Interconexão . . . . .	71
<b>6. Considerações Finais</b>	<b>76</b>
6.1. Conclusões. . . . .	76
6.2. Trabalhos Futuros . . . . .	77
<b>A. Coloração com Folga de Ordem 2 com <math>\Delta + 2</math> Cores</b>	<b>78</b>
<b>B. Coloração Total Equilibrada em Ciclos</b>	<b>83</b>
<b>C. Coloração Total Equilibrada em Árvores</b>	<b>85</b>
<b>D. Coloração Total Equilibrada em Hipercubos</b>	<b>88</b>
<b>E. Coloração Total Equilibrada em Toros</b>	<b>92</b>
<b>F. Coloração Total Absolutamente Equilibrada em Grafos Completos</b>	<b>96</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>98</b>

# Capítulo 1

## Conceitos Básicos

### 1.1. Introdução

Neste capítulo introdutório, inicialmente fez-se uma breve descrição histórica acerca da teoria dos grafos. Em seguida, relatou-se os aspectos relevantes referentes à motivação para o desenvolvimento deste estudo, bem como seus objetivos. Na secção vindoura, apresentou-se a organização textual do trabalho. Por último, discutiu-se formalmente alguns conceitos básicos da teoria dos grafos usados neste trabalho. Para embasar este capítulo, utilizou-se BONDY e MURTY (1976), BOAVENTURA NETTO (1996), DIESTEL (1997), SEOUD *et al.* (1997), FONSECA (2000), ISOBE (2002), ZMAZEK e ZEROVNIK (2000), KEMNITZ e MARANGIO (2003), JURKIEWICZ (2004), LOZANO (2005), LOZANO *et al.* (2008), CHUNLING *et al.* (2009), LOZANO *et al.* (2009), PRNAVER e ZMAZEK (2009), FRIEDMANN *et al.* (2011).

## 1.2. Um Breve Histórico

A teoria dos grafos tem uma origem relativamente recente (século XVIII) na história da matemática, sendo seu surgimento estabelecido em 1736, ano da solução do problema das pontes de Königsberg por Euler. Além deste, poucos trabalhos surgiram até meados do século XIX, destacando-se o de Kirchhoff que, em 1847, utilizou modelos em árvores no estudo de circuitos elétricos, e o de Cayley, que utilizou o conceito de grafo para fazer a enumeração dos isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos saturados, em química orgânica.

A partir daí, diversos problemas e aplicações surgiram, e algumas sub-áreas foram, naturalmente, nascendo dentro da teoria dos grafos. A coloração é uma sub-área que teve seu início com a Conjectura das Quatro Cores, apresentada por Francis Guthrie a Augustus De Morgan, por volta de 1850 e provada por Appel e Haken, em 1977.

A importância deste problema reside nos desenvolvimentos teóricos trazidos pelas tentativas de resolvê-lo, os quais enriqueceram a teoria dos grafos em diversos aspectos ao longo da primeira metade do século XX. Em 1941, Brooks provou que, se  $G$  é um grafo conexo e não é um ciclo ímpar e nem um grafo completo, então  $\chi \leq \Delta$ , onde  $\Delta$  representa o grau máximo do grafo e  $\chi$ , o número cromático de  $G$ , isto é, o menor número de cores que se pode utilizar para colorir os vértices de um grafo. Juntamente com a coloração de vértices, o interesse pelo estudo da coloração de arestas e o estudo do índice cromático  $\chi'$  de um grafo, aumentaram bastante. Neste sentido, o importante Teorema de Vizing, em 1964, resultado obtido independentemente por Gupta em 1966, estabelece que  $\Delta \leq \chi' \leq \Delta + 1$ . Na verdade, Vizing provou um teorema mais geral para multigrafos, demonstrando que  $\Delta \leq \chi' \leq \Delta + \mu$ , onde  $\mu$  representa a multiplicidade do multigrafo. Na prática, rapidamente foram encontradas diversas aplicações para a coloração de vértices e arestas, em

diferentes áreas, como alocação e escalonamento de tarefas, desenho e instalação de redes elétricas, redes de interconexão, dentre outras.

As noções de coloração total e de número cromático total  $\chi''$  de um grafo foram introduzidas em 1965, simultaneamente por Behzad e Vizing. Neste mesmo ano, eles conjecturaram que  $\chi'' \leq \Delta + 2$ . Novamente, Vizing fez uma conjectura mais geral afirmando que  $\chi'' \leq \Delta + \mu + 1$ . Para o caso geral, essas conjecturas permanecem em aberto até hoje.

### 1.3. Motivação e Objetivos do Trabalho

As primeiras noções de coloração equilibrada de vértices surgiram no início da década de 70, com HAJNAL e SZEMERÉDI, enquanto que o conceito de coloração total equilibrada foi abordado em 2005 por LOZANO, que apresentou os principais resultados relativos às colorações total e total equilibrada, e ainda relacionou estes temas com os grafos regulares e planares. Mostrou também que é possível colorir de forma total e equilibrada árvores utilizando  $\Delta + 1$  cores, e finalizou desenvolvendo três heurísticas para coloração total equilibrada em grafos.

Em 1997, SEOUD *et al.* determinaram o número cromático total para vários grafos gerados a partir do produto cartesiano, em particular, caminho  $\times$  estrela, ciclo  $\times$  estrela, caminho  $\times$  ciclo e ciclo  $\times$  ciclo.

ZMAZEK e ZEROVNIK, em 2000, provaram que se a conjectura de Behzad-Vizing for verdadeira para os grafos  $G$  e  $H$ , então é verdadeira para o produto cartesiano  $G \times H$ .

Em seu trabalho, KEMNITZ e MARANGIO (2003) investigaram o número cromático total dos produtos cartesianos obtidos de dois grafos completos, dois ciclos, e um grafo completo e um grafo bipartido.

Já CHUNLING *et al.* (2009), trabalharam com a coloração total equilibrada em produtos cartesianos obtidos de dois ciclos.

Em 2008, LOZANO *et al.* descreveram uma interessante aplicação sobre coloração total equilibrada. Este conceito foi empregado para obter uma representação natural para o processamento paralelo em redes de interconexão, onde uma coloração total equilibrada, com no máximo  $\Delta + 2$  cores, foi utilizada para modelar as principais topologias de redes de interconexão, satisfazendo assim a conjectura de Vizing.

LOZANO *et al.* (2009), introduziram um tipo de coloração própria de vértices chamada de coloração com folga de ordem  $k$ , sendo  $k$  um inteiro positivo. Mostraram também que a coloração com folga  $k$  é uma extensão do conceito de coloração 2-distante, e provaram que é sempre possível colorir um grafo  $G$  qualquer com folga de ordem 2, com  $\Delta + 2$  cores.

Em seguida, em 2011, FRIEDMANN *et al.* apresentaram uma técnica para coloração total, tomando como base uma coloração com folga de ordem  $\Delta$ , com  $\Delta + 1$  cores. Os autores mostraram que é possível colorir totalmente o grafo *Block-Cactus*, utilizando esta técnica.

Motivado pelos trabalhos citados acima, pretende-se atingir os seguintes objetivos:

- Apresentar o conceito de produto funcional de grafos, que tem como base o produto cartesiano de grafos.
- A partir do produto funcional de grafos, apresentar uma nova subfamília de grafos regulares, que podem ser coloridos com folga de ordem  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores.
- Mostrar que se um grafo regular pode ser colorido com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores, então sua coloração total é equilibrada com  $\Delta + 2$  cores no máximo.

- Mostrar que essa família é suficientemente grande, isto é, que pode ser estendida preservando a coloração total equilibrada.

## 1.4. Organização do Trabalho

Neste trabalho, além da visão geral fornecida neste capítulo, elaborou-se mais cinco capítulos. No segundo capítulo, serão apresentados os conceitos de coloração com folga, coloração de vértices, arestas, total e coloração total equilibrada que se utilizou ao longo do texto, bem como uma técnica para coloração total, que toma como base a coloração com folga de ordem  $\Delta$ , descrita por FRIEDMANN *et al.* em 2011.

No terceiro capítulo, serão apresentadas ideias que tomam como base o conceito de produto cartesiano de grafos, inicialmente estendido para digrafos, o que propiciou a inserção de um novo tipo de produto de grafos chamado aqui de produto funcional de grafos. O capítulo terminará com a generalização deste produto funcional.

No quarto capítulo, a partir do produto funcional de grafos, será apresentada uma nova subfamília de grafos regulares, que podem ser coloridos com folga de ordem  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores. Em seguida, será provado que se um grafo regular pode ser colorido com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores, então sua coloração total é equilibrada. A prova de que essa família é suficientemente grande, encerrará o capítulo.

O quinto capítulo será reservado para uma aplicação. Nele será descrito o trabalho de LOZANO *et al.*, que apresentaram em 2008 uma interessante aplicação sobre coloração total equilibrada em redes de interconexão. Em seguida, as principais topologias de rede do tipo ponto-a-ponto serão exibidas, e o capítulo terminará com algumas sugestões de novas topologias para este tipo de rede.

O capítulo 6 apresentará as conclusões, seguidas de algumas sugestões para trabalhos futuros.

## 1.5. Definições

Nesta seção, são descritas definições básicas da teoria de grafos que são utilizadas no trabalho. Optou-se em apresentá-las de forma bem detalhada e utilizando diversas ilustrações.

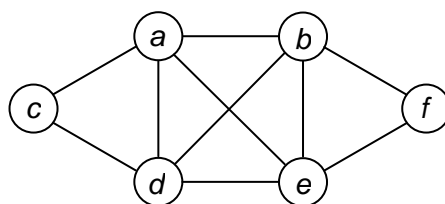
**Definição 1.1.** Um **grafo**  $G$  é uma tripla ordenada  $(V(G), E(G), \Psi_G)$ , formada por um conjunto finito não vazio  $V(G)$  de vértices, um conjunto  $E(G)$  de arestas e uma função de incidência  $\Psi_G$  que associa a cada aresta de  $E(G)$  um par não ordenado de vértices.

Deste ponto em diante, a função  $\Psi_G$  será omitida e um grafo  $G$  será denotado por  $G(V(G), E(G))$  ou  $G(V, E)$  ou mais simplesmente  $G$  quando não houver necessidade de destacar o conjunto de vértices e/ou arestas. O número de vértices é representado por  $|V|$  ou  $n$ , enquanto o número de arestas é representado por  $|E|$  ou por  $m$ . Se  $e \in E(G)$  e  $u, v \in V(G)$ , são tais que  $\Psi_G(e) = uv$ , diz-se que  $e$  liga ou conecta  $u$  e  $v$ , ou ainda, que  $u$  e  $v$  são os extremos ou pontos finais da aresta  $e$  que também será denotada por  $uv$ . Neste caso, diz-se que  $u$  e  $v$  são adjacentes, e que a aresta  $e$  é incidente aos vértices  $u$  e  $v$ . Se duas arestas possuem um extremo comum são ditas adjacentes. Duas arestas com os mesmos extremos são ditas paralelas ou múltiplas. Um grafo sem arestas múltiplas é chamado de grafo simples. Um grafo com arestas múltiplas é chamado também de multigrafo. Uma aresta com extremos iguais é chamada de laço. Neste trabalho, a palavra grafo tem o significado de grafos simples sem laços. Para cada vértice  $v$  o número de arestas incidentes a  $v$  é dito grau do vértice  $v$  e denotado por  $d_G(v)$ , ou simplesmente por  $d(v)$ , quando não existir ambiguidade com relação ao grafo. O conjunto de vértices adjacentes ao vértice  $v$ , será representado por  $Adj(v)$ . O número  $\min_{v \in V} d(v)$  será denotado por  $\delta(G)$ , ou simplesmente por  $\delta$ , quando não existir ambiguidade, enquanto o número  $\max_{v \in V} d(v)$



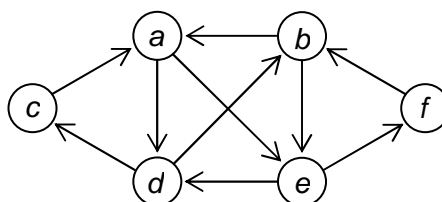
será denotado por  $\Delta(G)$ , ou simplesmente por  $\Delta$ , quando não existir ambiguidade com relação ao grafo. Um grafo  $G(V, E)$ , tal que todos os seus vértices tenham o mesmo grau  $k$  é chamado de grafo  $k$ -regular. Dado um grafo simples  $G(V, E)$ , se  $G$  é  $(n-1)$ -regular, então é chamado de grafo completo de ordem  $n$  (ou clique) e denotado por  $K_n$ . Se  $E = \emptyset$ , então  $G$  é chamado de grafo vazio de ordem  $n$  e denotado por  $O_n$ .

A Figura 1.1 abaixo mostra um exemplo de grafo onde  $V = \{a, b, c, d, e, f\}$  e  $E = \{ab, ac, ad, ae, bd, be, bf, cd, de, ef\}$ .



**Figura 1.1.** Um grafo  $G = (V, E)$  com  $n = 6$  e  $m = 10$ .

No caso em que as arestas são orientadas (arcos), este grafo recebe o nome de **digrafo**, e é representado por  $\vec{G}(V, E)$ .



**Figura 1.2.** Um digrafo  $\vec{G}(V, E)$  com  $n = 6$  e  $m = 10$ .

Seguem abaixo, outras definições fundamentais para o presente estudo.

**Definição 1.2.** Seja  $G(V, E)$  um grafo; um grafo  $H(V', E')$  é dito um **subgrafo** de  $G$  se  $V' \subseteq V$  e  $E' \subseteq E$ .

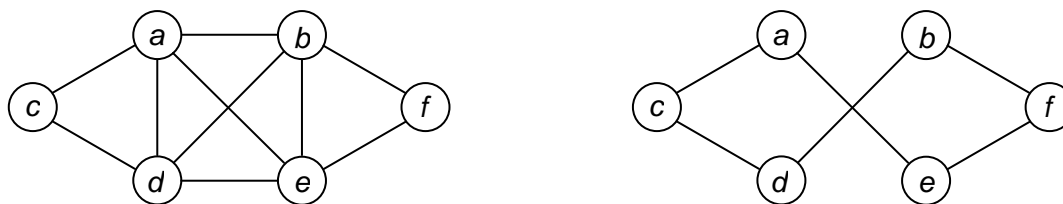


Figura 1.3. Um grafo  $G(V, E)$  e seu subgrafo  $H(V', E')$ .

**Definição 1.3.** Seja  $G(V, E)$  um grafo; um subgrafo  $H(V', E')$  de  $G$  é dito **subgrafo induzido** de  $G$ , se  $uv \in E$  implica em  $uv \in E'$ . Adotou-se a notação  $G[V]$ , para denotar o subgrafo induzido.

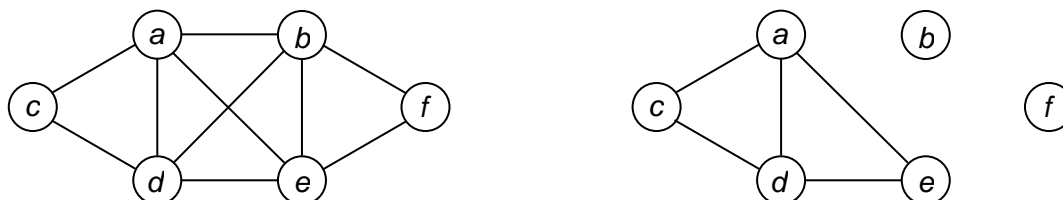


Figura 1.4. Um grafo  $G(V, E)$  e seu subgrafo induzido pelo subconjunto  $\{a, c, d, e\}$  de  $V(G)$ .

**Definição 1.4.** Seja  $G(V, E)$  um grafo. O grafo  $H(V', E')$  é dito **subgrafo parcial** de  $G$ , se  $E' \subset E$ , e  $V'$  é tal que se  $v \in V'$  então  $v$  é extremo de uma aresta de  $E'$ . Adotou-se a notação  $G[E]$ , para representar o subgrafo parcial.

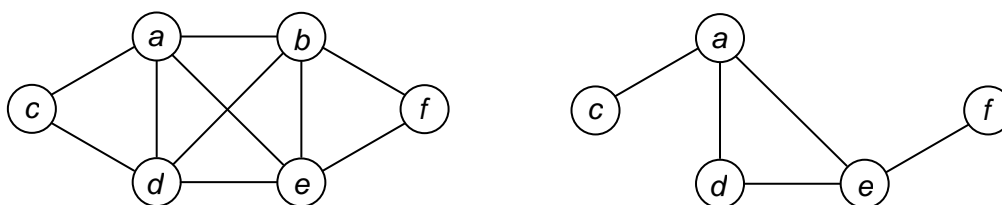
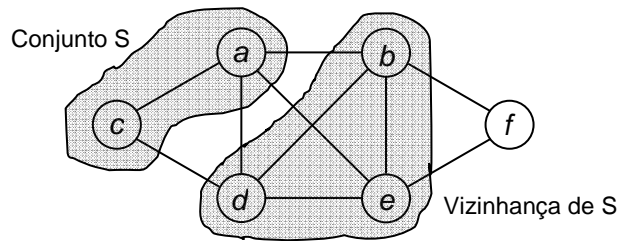


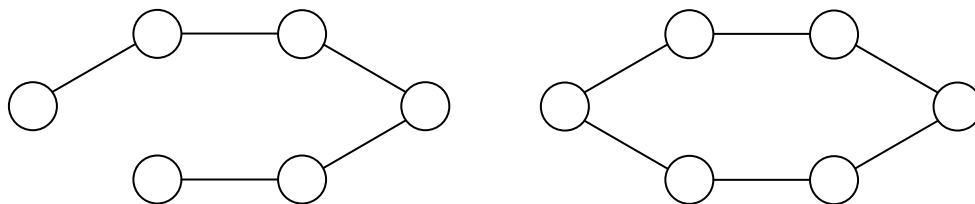
Figura 1.5. Um grafo  $G(V, E)$  e seu subgrafo parcial obtido do subconjunto  $\{ac, ad, ae, de, ef\}$  de  $E(G)$ .

**Definição 1.5.** Sejam  $G(V, E)$  um grafo e  $S \subseteq V$ . O conjunto de todos os vértices de  $G-S$  adjacentes a vértices de  $S$ , em  $G$ , é dito de **vizinhança** do conjunto  $S$ , e denotado por  $N(S)$ . Se  $S$  for um conjunto unitário  $S = \{v\}$ , usaremos a notação  $N(v)$  em lugar de  $N(\{v\})$ .



**Figura 1.6.** Um conjunto  $S = \{a, c\}$  e sua vizinhança  $\{b, d, e\}$ .

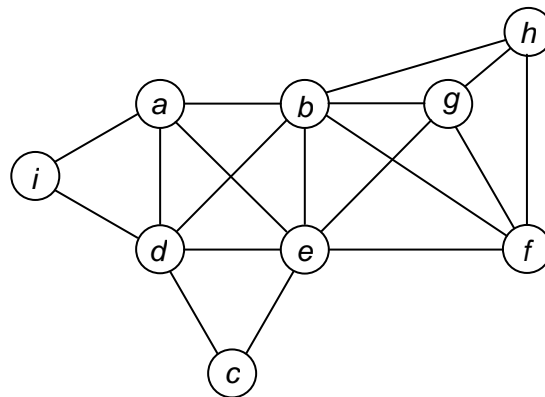
**Definição 1.6.** Um **caminho** em um grafo  $G(V, E)$  é uma sequência finita e não nula  $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$  cujos termos são alternativamente vértices e arestas, tais que, para  $i = 1, \dots, k$ , os extremos de  $e_i$  são  $v_{i-1}$  e  $v_i$  e nenhum elemento de  $W$  se repete. Neste caso, diz-se que o caminho  $W$  liga ou conecta os vértices  $v_0$  e  $v_k$ . Se uma sequência satisfaz as condições acima, e, além disso,  $v_0 = v_k$ , então a sequência é chamada de **ciclo**.



**Figura 1.7.** Um caminho e um ciclo.

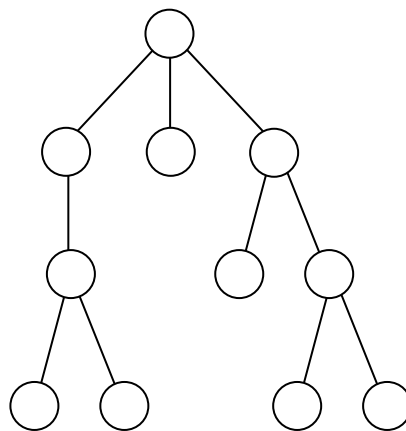
**Definição 1.7.**  $G(V, E)$  é dito um grafo **conexo**, se para todo par de vértices  $u, v$  existe um caminho que liga  $u$  a  $v$ . Caso contrário,  $G$  é chamado de grafo **desconexo**.

Se para cada par de vértices  $u, v$  existem pelo menos  $k$  caminhos disjuntos ligando  $u$  com  $v$ , então  $G$  é dito  $k$ -conexo.



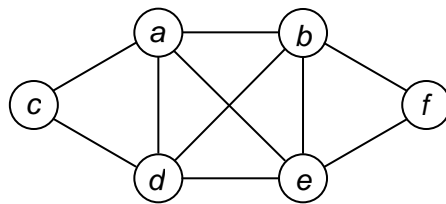
**Figura 1.8.** Um grafo conexo.

**Definição 1.8.** Uma **árvore** é um grafo conexo sem ciclo, isto é, para um dado  $n$ , uma árvore é o grafo conexo com menor número de arestas, ou seja,  $n - 1$ .



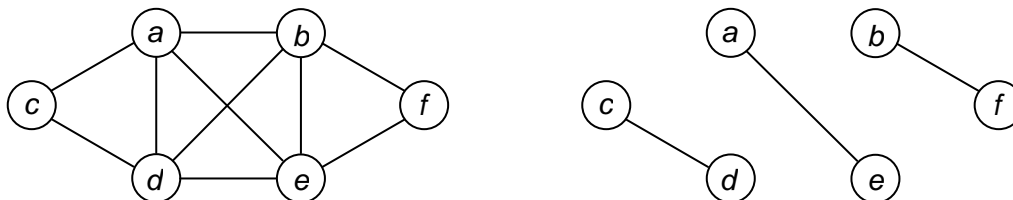
**Figura 1.9.** Uma árvore com grau máximo 3.

**Definição 1.9.** Um **conjunto**  $S \subset V$  em um grafo  $G(V, E)$  é dito **independente** se, para todo par  $\{i, j\} \subset S$  se tem  $(i, j) \notin E$  ou, o que é equivalente,  $S \cap N(S) = \emptyset$ . Um conjunto independente  $S$  é **maximal** se  $S \cup N(S) = V$ .



**Figura 1.10.**  $\{c, f\}$  é um conjunto independente maximal do grafo  $G(V, E)$ .

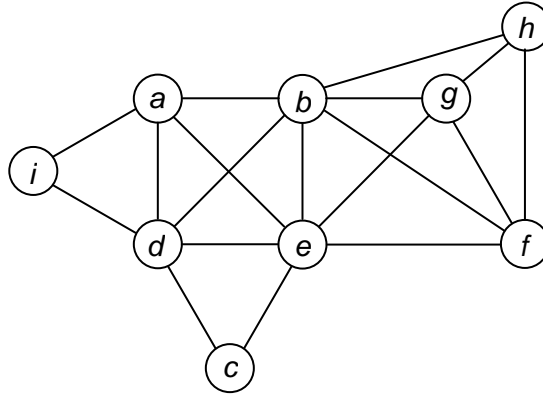
**Definição 1.10.** Um **emparelhamento** é um subconjunto de arestas  $M \subset E$  em um grafo  $G(V, E)$  tal que nenhum vértice seja incidente a mais de uma aresta de  $M$ . Se um emparelhamento envolver todos os vértices do grafo, ele é chamado **perfeito**.



**Figura 1.11.** Um grafo  $G(V, E)$  e um emparelhamento perfeito de  $G(V, E)$ .

**Definição 1.11.** Sejam  $G(V, E)$  um grafo e  $v \in V$  um vértice de  $G$ . Diz-se que  $v$  é **simplicial** quando  $Adj(v)$  é uma clique em  $G$ , isto é, o subgrafo  $G[Adj(v)]$  de  $G$  induzido por  $Adj(v)$  é um grafo completo.

No grafo da Figura 1.12, os vértices  $c, h, i$  são simpliciais, pois suas listas de adjacências induzem subgrafos completos, ou seja,  $Adj(c) = \{d, e\} = K_2$ ,  $Adj(h) = \{b, f, g\} = K_3$ ,  $Adj(i) = \{a, d\} = K_2$ .

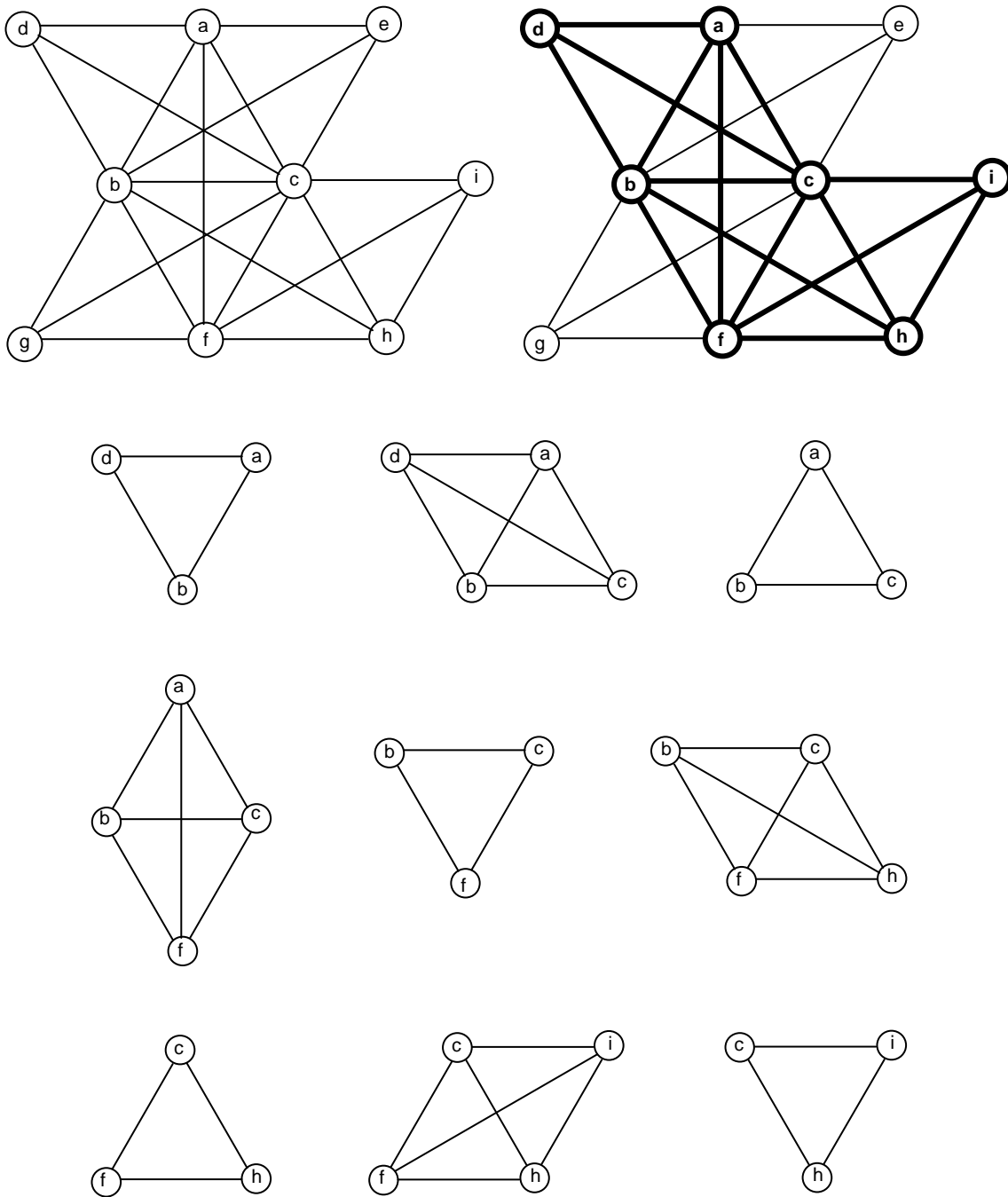


**Figura 1.12.** Um grafo  $G(V, E)$  e seus vértices simpliciais  $c, h, i$ .

**Definição 1.12.** Um  $k$ -caminho em um grafo  $G = (V, E)$ ,  $k > 0$ , com comprimento  $p > 0$ , é uma sequência  $\langle B_0, C_1, B_1, \dots, C_p, B_p \rangle$ , tal que:

- i)  $B_j \subset V$ ,  $0 \leq j \leq p$ , são  $k$ -cliques distintas de  $G$ ;
- ii)  $C_i \subseteq V$ ,  $1 \leq i \leq p$ , são  $(k+1)$ -cliques distintas de  $G$ ;
- iii)  $B_{i-1} \subset C_i$ ,  $B_i \subset C_i$  e nenhuma outra  $k$ -clique  $B_j$ ,  $0 \leq j \leq p$ ,  $j \neq i-1$  e  $j \neq i$ , é um subconjunto de  $C_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ .

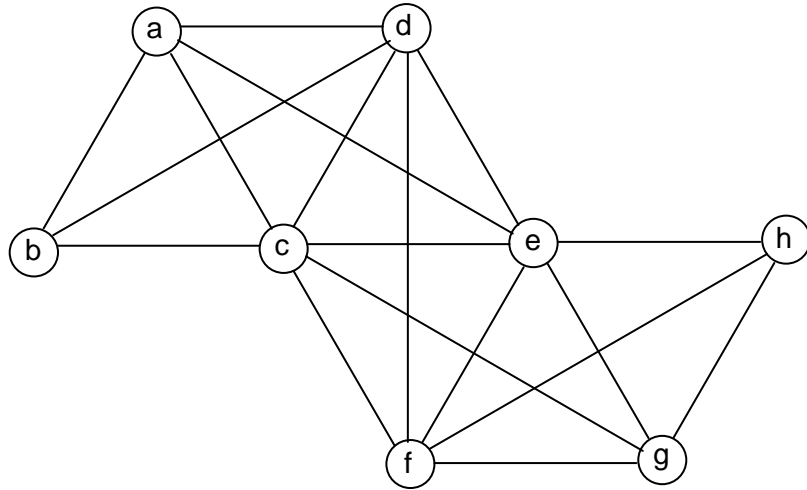
A Figura 1.13 mostra um 3-caminho maximal representado pela sequência  $\langle \{a, b, d\}; \{a, b, c, d\}; \{a, b, c\}; \{a, b, c, f\}; \{b, c, f\}; \{b, c, f, h\}; \{c, f, h\}; \{c, f, h, i\}; \{c, h, i\} \rangle$ . Este 3-caminho é maximal, pois não existe outro 3-caminho que contenha mais do que quatro 4-cliques neste grafo.



**Figura 1.13.** 3-árvore e 3-caminho maximal de comprimento 4.

**Definição 1.13.** Seja  $G = (V, E)$  um grafo com  $n$  vértices, sendo  $n > k$ .  $G$  é um **grafo  $k$ -caminho** quando existe em  $G$  um  $k$ -caminho de comprimento  $n - k$ .

Segue abaixo, na Figura 1.14, um grafo 3-caminho de comprimento 5, representado pela sequência  $\langle \{a, b, c\}; \{a, b, c, d\}; \{a, c, d\}; \{a, c, d, e\}; \{c, d, e\}; \{c, d, e, f\}; \{c, e, f\}; \{c, e, f, g\}; \{e, f, g\}; \{e, f, g, h\}; \{e, g, h\} \rangle$ .



**Figura 1.14.** Grafo 3-caminho de comprimento 5.

**Definição 1.14.** Um **esquema de eliminação perfeita (EEP)** de  $G$  é uma função bijetora  $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow V$ , tal que  $\sigma(i)$  é um vértice simplicial em  $G[\{\sigma(j) \mid i \leq j \leq n\}]$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

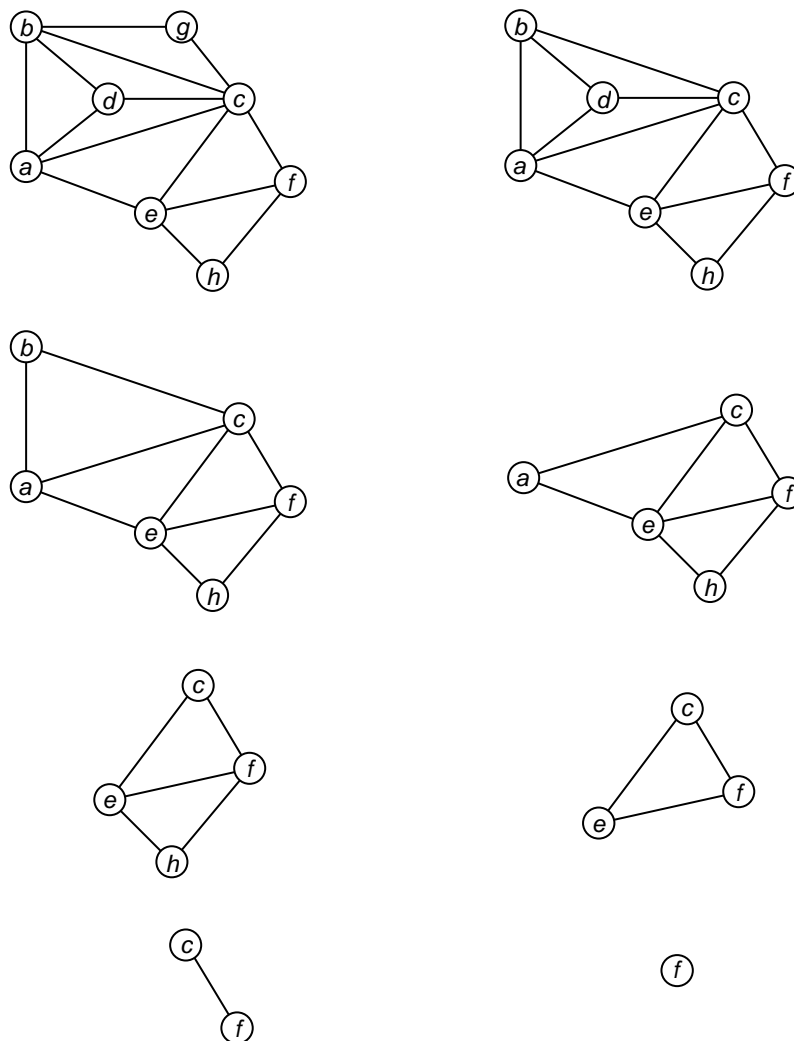
Em outras palavras, um esquema de eliminação perfeita dispõe os vértices em uma sequência  $\sigma(G) = [\sigma(1), \dots, \sigma(n)]$ , de maneira que todo vértice seja simplicial no subgrafo  $G$  induzido por ele e pelos que o seguem na sequência  $\sigma$ . Assim,  $\sigma(i) = v_i$  significa o  $i$ -ésimo vértice na sequência  $\sigma$  e  $\sigma^{-1}(w)$  corresponde à posição ocupada pelo vértice  $w$  na sequência  $\sigma$ .

Para determinar um esquema de eliminação perfeita, inicia-se a partir de uma sequência vazia de vértices, onde a cada passo um vértice simplicial é escolhido, acrescentado à sequência e excluído do grafo. Ao final do processo esta sequência conterá um esquema de eliminação perfeita. Para o grafo da Figura 1.12, um possível



esquema de eliminação perfeita é a sequência  $[i, a, h, g, f, b, e, c, d]$ , onde o vértice  $i$  é simplicial em  $G[\{i, a, h, g, f, b, e, c, d\}]$ , o vértice  $a$  é simplicial em  $G[\{a, h, g, f, b, e, c, d\}]$  e assim sucessivamente. A sequência  $[h, c, i, f, g, e, d, a, b]$  é outro esquema de eliminação perfeita para este grafo.

Neste exemplo abaixo, apresentado por FONSECA (2000), pode-se observar que a sequência de vértices  $[g, d, b, a, h, e, c, f]$  forma um esquema de eliminação perfeita do grafo  $G$ .



**Figura 1.15.** Um grafo  $G$  e seu  $EEP$  através da sequência de vértices  $[g, d, b, a, h, e, c, f]$ .

**Definição 1.15.** Um **quadrado latino** de ordem  $n$  é uma matriz  $n \times n$  preenchida com pelo menos  $n$  diferentes símbolos, de tal maneira que cada símbolo ocorre no máximo uma vez em cada linha ou coluna.

Segue abaixo, na Figura 1.16, exemplos de quadrados latinos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(A)

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{bmatrix}$$

(B)

**Figura 1.16.** (A) Quadrado latino de ordem 3. (B) Quadrado latino de ordem 4.

Como foi dito acima, este capítulo teve como objetivo descrever os conceitos básicos, além de apresentar de forma preliminar o assunto que será abordado neste trabalho, isto é, **coloração em grafos**. No próximo capítulo, serão apresentadas algumas definições envolvendo os tipos de colorações utilizadas no decorrer deste texto.

# Capítulo 2

## Extensão Natural de uma Coloração com Folga de Ordem $\Delta$

### 2.1. Introdução

Este capítulo se inicia com as definições de coloração de vértices, de arestas, total e total equilibrada que se baseiam em YAP (1986), YAP (1996), ISOBÉ (2002) e LOZANO (2005). Segue com a introdução de um conceito recente, coloração de vértices com folga, dada por LOZANO *et al.* (2009). Finalizando, será apresentada uma técnica de completamento de cores chamada de extensão natural de uma coloração com folga de ordem  $\Delta$ , descrita por FRIEDMANN *et al.* em 2011.

Para ilustrar essa técnica, será provado que para todo grafo  $k$ -caminho existe uma coloração como folga de ordem  $\Delta$ , e como consequência, obteve-se uma coloração total dessa família utilizando o resultado citado acima.

## 2.2. Coloração de Vértices, de Arestas, Total e Total Equilibrada

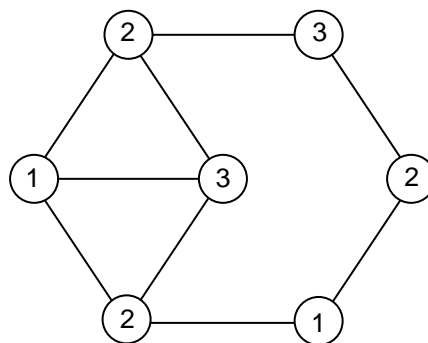
Nesta seção, são apresentados os conceitos de coloração de vértices, de arestas, total e total equilibrada que servirão de suporte para o restante do trabalho.

**Definição 2.1.** Dado um grafo  $G(V, E)$ , uma **coloração de vértices** de  $G$  é uma aplicação do conjunto de vértices  $V$  em um conjunto de cores  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Uma coloração de vértices com  $k$  cores é chamada de  $k$ -coloração de vértices.

Uma coloração de vértices própria é uma coloração de vértices tal que nenhum par de vértices adjacentes tem associada a mesma cor. Uma coloração de vértices própria com  $k$  cores, é chamada de  $k$ -coloração de vértices própria.

Dado um grafo  $G(V, E)$ , o menor número que permite colorir propriamente os vértices de  $G$  é chamado de **número cromático de  $G$** , o qual é denotado por  $\chi(G)$ , ou simplesmente  $\chi$ , se não existir ambiguidade.

A Figura 2.1 mostra uma 3-coloração de vértices própria com as cores 1, 2 e 3. Neste caso,  $\chi(G) = 3$ .



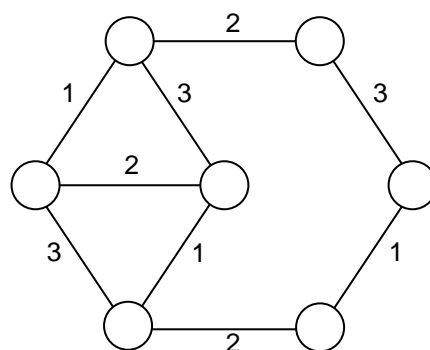
**Figura 2.1.** 3-coloração de vértices própria.

**Definição 2.2.** Dado um grafo  $G(V, E)$ , uma **coloração de arestas** de  $G$  é uma aplicação do conjunto de arestas  $E$  em um conjunto de cores  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Uma coloração de arestas com  $k$  cores, é chamada de  $k$ -coloração de arestas.

Uma coloração de arestas própria é uma coloração de arestas tal que nenhum par de arestas adjacentes tem associada a mesma cor. Uma coloração de arestas própria com  $k$  cores é chamada de  $k$ -coloração de arestas própria.

Dado um grafo  $G(V, E)$ , o menor número que permite colorir propriamente as arestas de  $G$  é chamado de **índice cromático de  $G$** , o qual é denotado por  $\chi'(G)$ , ou simplesmente  $\chi'$ , se não existir ambiguidade.

Como exemplo, a Figura 2.2 ilustra uma 3-coloração de arestas própria, com as cores 1, 2 e 3, em que  $\chi'(G) = 3$ .

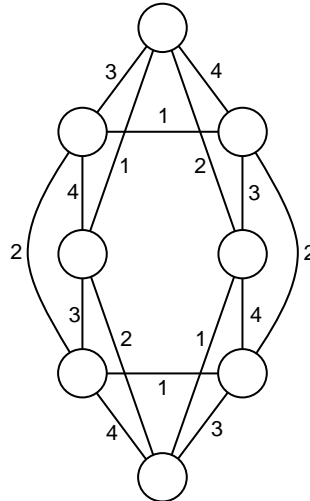


**Figura 2.2.** 3-coloração de arestas própria.

Em 1964, Vizing provou que para qualquer grafo simples  $G$   $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ , YAP (1986). Quando  $\chi'(G) = \Delta(G)$ ,  $G$  é chamado de **Classe 1**; caso contrário, **Classe 2**. HOLYER (1981) provou que é NP-completo<sup>1</sup> determinar se um grafo simples é Classe 1 ou Classe 2. No entanto, esforços têm sido feitos para dar uma caracterização parcial. Por exemplo, VIZING (1965) mostrou que um grafo simples

<sup>1</sup> Pode-se dizer que os problemas NP-completo estão entre os problemas mais difíceis da teoria da complexidade computacional.

planar é de Classe 1, se o seu grau máximo é de pelo menos 8. Em contraste, ele observou que para os graus máximos 2, 3, 4, e 5 existem grafos planares simples de Classe 2. A Figura 2.3 mostra um grafo de Classe 1 colorido com  $\Delta = 4$  cores:



**Figura 2.3.** Grafo de Classe 1.

**Definição 2.3.** Dado um grafo  $G(V, E)$ , uma **coloração total** de  $G$  é uma aplicação do conjunto  $E \cup V$  em um conjunto de cores  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Uma coloração total com  $k$  cores é chamada de  $k$ -coloração total.

Uma coloração total própria é uma coloração tal que nenhum par de elementos incidentes ou adjacentes tem associada a mesma cor. Uma coloração total própria com  $k$  cores é chamada de  $k$ -coloração total própria. Nesse texto, a expressão “coloração total” sempre será usada em referência à “coloração total própria”.

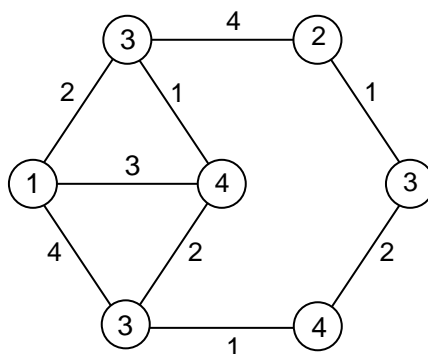
O menor número de cores que permite construir uma coloração total própria de  $G$  é chamado **número cromático total de  $G$**  e denotado por  $\chi''(G)$ , ou simplesmente  $\chi''$ , se não existir ambiguidade.

**Definição 2.4.** Dado um grafo  $G(V, E)$ , um conjunto de cores  $C$  e uma **coloração total**  $c: E \cup V \rightarrow \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , de  $G$ , com as cores de  $C$ . Esta coloração total é **equilibrada** se, para todo par de cores  $c_i$  e  $c_j$ ,  $i \neq j$ , tem-se  $|a(c_i) - a(c_j)| \leq 1$ , onde

$a(c_i) = |c^{-1}(c_i)|$ ,  $i = 1, \dots, k$ , ou, dito de outra forma,  $a(c_i)$  representa o número de aparições da cor  $c$  na coloração.

Dado um grafo  $G(V, E)$ , o menor número de cores que permite construir uma coloração total equilibrada de  $G$  é chamado **número cromático total equilibrado de  $G$**  e denotado por  $\chi_e(G)$  ou simplesmente  $\chi_e$ , se não existir ambiguidade.

A Figura 2.4 ilustra uma 4-coloração total equilibrada, com as cores 1, 2, 3 e 4. Nela, observa-se que  $a(1) = a(2) = a(3) = a(4) = 4$ , o que de fato caracteriza uma coloração total equilibrada. Neste caso,  $\chi_e(G) = 4$ .



**Figura 2.4.** 4-coloração total equilibrada.

De agora em diante, para qualquer tipo de coloração, se um elemento  $x$  tem associada uma cor  $c$  diz-se que  $x$  está colorido com a cor  $c$ .

Claramente,  $\chi(G) \geq \Delta(G) + 1$ , para qualquer grafo  $G$ . Consequentemente, o número cromático total equilibrado possui o mesmo limite inferior, pois, evidentemente,  $\chi \leq \chi_e$ . Por outro lado, os matemáticos Vadim Vizing e Medhi Behzad conjecturaram que todo grafo simples  $G$  possui uma coloração total com no máximo  $\Delta(G) + 2$  cores. Esta conjectura, descrita a seguir, também conhecida como Conjectura da Coloração Total ou de Vizing-Behzad foi apresentada em 1965, independentemente, por Vizing e Behzad, YAP (1996).

**Conjectura da Coloração Total (Vizing-Behzad).** *Para qualquer grafo  $G$ , tem-se  $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$ .*

Na verdade, Vizing propôs uma conjectura mais geral, que diz que para qualquer multigrafo  $G$ ,  $\chi''(G) \leq \Delta(G) + \mu(G) + 1$ .

### 2.3. Coloração de Vértices com Folga

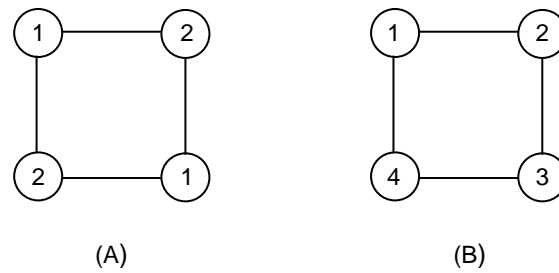
LOZANO, FRIEDMANN, WAGA E MARKENZON, 2009, introduzem, um tipo de coloração própria de vértices que chamam de coloração com folga de ordem  $k$ , sendo  $k$  um inteiro positivo. Dentre os resultados mostrados pelos autores, destacamos um que diz que é sempre possível colorir um grafo  $G$  qualquer com folga de ordem 2, com  $\Delta(G) + 2$  cores.

**Definição 2.5.** Considere um grafo  $G = (V, E)$  e  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Uma coloração própria  $c: V \rightarrow C$  de  $G$  é denominada uma **coloração com folga de ordem  $k$**  de  $G$ , quando para todo  $v \in V$  se  $d(v) \leq k$  então  $|c(N(v))| = d(v)$ , caso contrário  $|c(N(v))| \geq k$ .

Assim, na coloração de vértices com folga de ordem  $k$ , vértices com grau menor do que a folga exigida devem ter todos os vizinhos coloridos com cores distintas e os de grau igual ou maior do que  $k$ , devem utilizar na vizinhança pelo menos  $k$  cores. Para o caso  $k = 1$ , temos coloração própria usual de vértices, e  $\Delta$  é cota superior para a ordem da folga.

A Figura 2.5 a seguir ilustra a coloração de um ciclo com 4 vértices. Em (A) tem-se uma coloração de vértices habitual, enquanto em (B) a coloração dos vértices do ciclo é com folga 2.

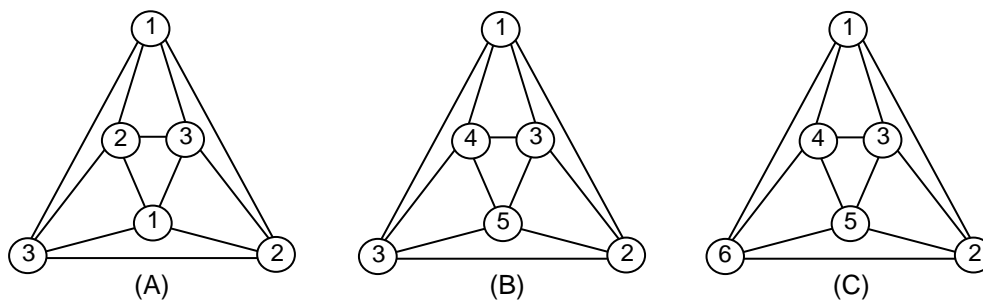




**Figura 2.5.** (A) Coloração de vértices usual e (B) coloração de vértices com folga 2

Diz-se que  $G$  é  $t$ -colorível com folga de ordem  $k$  quando  $|c(V)| = t \leq |C|$ . Define-se também o **número cromático com folga de ordem  $k$**  de  $G$ , denotado por  $\chi_f^k(G)$ , como o menor valor de  $t$  para o qual existe uma coloração com folga de ordem  $k$  para os vértices de  $G$ .

Na Figura 2.6(A), abaixo, a coloração própria de vértices apresentada é também uma coloração com folga de ordem 2. Desta forma,  $\chi_f^2(G) = \chi(G) = 3$ . Na Figura 2.6(B) tem-se um octaedro colorido com folga de ordem 3 com  $\chi_f^3(G) = 5$  e na Figura 2.6(C) uma coloração com folga de ordem 4 com  $\chi_f^4(G) = 6$ .



**Figura 2.6.** Coloração com folga de ordem 2, 3 e 4, respectivamente.

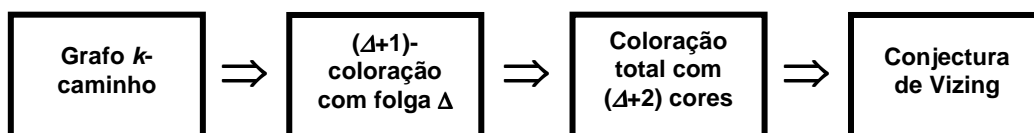
**Teorema 2.1.** (LOZANO, FRIEDMANN, WAGA E MARKENZON, 2009). *Para todo grafo  $G \neq C_5$ , onde  $C_5$  é o ciclo com 5 vértices, existe uma coloração com folga de ordem 2 com  $\Delta + 2$  cores, isto é,  $\chi_f^2(G) \leq \Delta + 2$ .*

**Prova.** Ver Anexo A.

Os autores ressaltam ainda que para colorações com folga de ordens maiores do que 2 não é possível obter um resultado análogo, isto é, que o resultado do Teorema 2.1. não pode ser estendido diretamente para ordens maiores do que 2. Exemplificam, mostrando que grafos com  $\Delta = 3$  não podem ser coloridos com folga de ordem 3 com  $\Delta + 3$  cores.

## 2.4. Extensão Natural de uma Coloração com Folga de Ordem $\Delta$

Nesta seção, serão apresentados os principais resultados deste capítulo. Inicialmente, é provado que para todo grafo  $k$ -caminho existe uma  $(\Delta + 1)$ -coloração com folga  $\Delta$  para os vértices de  $G$ . Em seguida, apresenta a prova de que se existe tal coloração em  $G$ , então existe uma coloração total de  $G$  com no máximo  $\Delta + 2$  cores. Esta técnica é chamada de **extensão natural de uma coloração com folga de ordem  $\Delta$**  e foi apresentada em 2011 por FRIEDMANN, LOZANO, MARKENZON e WAGA (2011). A seção termina com um corolário que diz que todo grafo  $k$ -caminho satisfaz a conjectura de Vizing para coloração total. A Figura 2.7 resume bem a sequência de resultados desta etapa do trabalho.



**Figura 2.7.** Todo grafo  $k$ -caminho satisfaz a Conjectura de Vizing

**Teorema 2.2.** *Para todo grafo  $k$ -caminho existe uma  $(\Delta + 1)$ -coloração com folga  $\Delta$  para os vértices de  $G$ .*

**Prova.** A prova será por indução sobre o número de vértices. Seja  $G(V, E)$  um grafo  $k$ -caminho. Para  $n = k + 1$  o grafo  $k$ -caminho é uma clique com  $k + 1$  vértices e o teorema vale trivialmente. Caso contrário, retire um vértice  $v$  simplicial de  $G$  e obtém-se um grafo  $k$ -caminho  $G'(V', E')$  e por hipótese de indução existe uma  $\Delta_{G'} + 1$  coloração com folga  $\Delta_{G'}$  para  $G'$ . Recoloca-se  $v$ . Se  $\Delta_G > \Delta_{G'}$ , então basta colorir  $v$  com a  $(\Delta_{G'} + 2)$ -ésima cor, que é menor ou igual que  $\Delta_G + 1$ , senão seja  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$  o conjunto dos vizinhos de  $v$ . Por facilidade, suponha que os vértices estão enumerados segundo sua ordem de entrada, tomando como base o esquema de eliminação perfeita, na construção de  $G'$ . Note que  $x_1$  está ligado a  $k$  vértices  $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$  fora da clique  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$  e por definição de grafo  $k$ -caminho, não existe vértice  $x_i$  que esteja ligado a algum vértice  $x_j \notin X \cup Y$ , logo  $N(X) = N(x_1)$ . Daí basta colorir  $v$  com uma cor diferente das cores usadas no conjunto  $\{x_1\} \cup N(x_1)$ . Como  $\Delta_G = \Delta_{G'} \geq d_{G'}(x_1) = |X| + |Y| - 1$  e por outro lado  $d_G(x_1) = |X| + |Y| - 1 + |\{v\}| = |X| + |Y|$ , temos que, no pior caso  $|\{x_1\} \cup N(x_1)| = |X| + |Y| = \Delta_G$ , sobrando ainda uma cor para o vértice  $v$ .  $\square$

A Figura 2.8 ilustra algumas etapas do Teorema 2.2. A Figura 2.8(A) mostra o um grafo 3-caminho  $G'$ , sem o vértice simplicial  $v$ , colorido com  $\Delta + 1$  cores, isto é, com 7 cores. Ao recolocarmos  $v$ , temos, em (B), um dos casos que é o aumento do grau do grafo  $G$  em relação a  $G'$ . Neste caso, pode-se colorir o vértice  $v$  com a cor  $c_8$ . No outro caso, como pode ser visto em (C), com a inserção de  $v$ , o grau de  $G$  não aumenta, entretanto, o Teorema 2.2 garante que ainda é possível colorir os vértices grafo com  $\Delta + 1$  cores, ou seja, 7 cores.

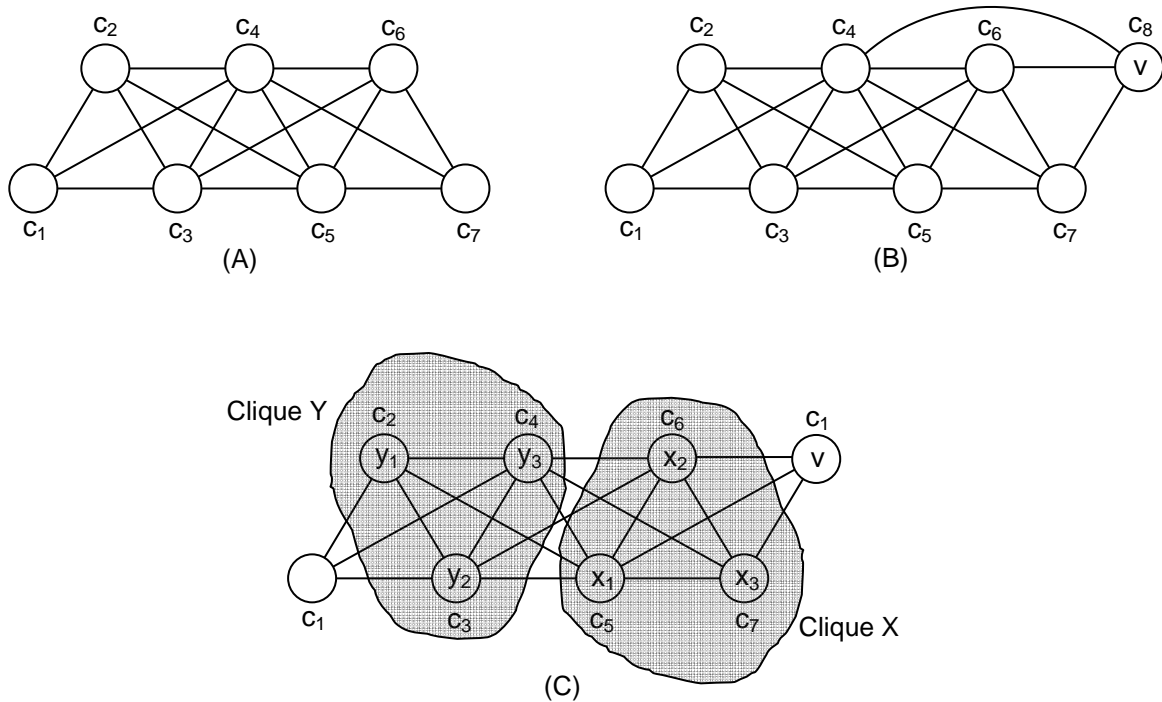


Figura 2.8. Etapas do Teorema 2.2.

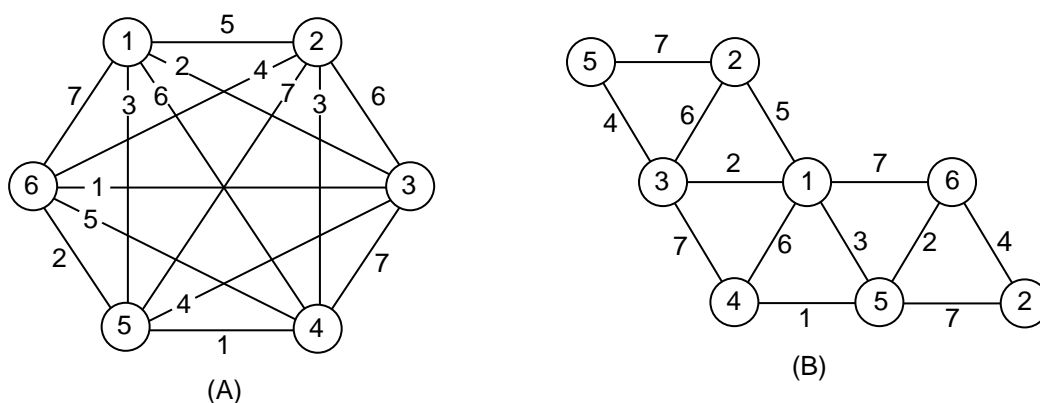
**Teorema 2.3.** (FRIEDMANN, LOZANO, MARKENZON e WAGA, 2011). *Sejam  $G(V, E)$  um grafo e  $c: V \rightarrow C = \{1, 2, 3, \dots, \Delta+1\}$  uma coloração com folga  $\Delta$  dos vértices de  $G$ . Então existe uma coloração total de  $G$  com no máximo  $\Delta + 2$  cores.*

**Prova.** Sejam  $K_{\Delta+1}(V', E')$  o grafo completo de ordem  $\Delta+1$ , e  $c': V' \rightarrow C' = \{1, 2, \dots, \Delta+2\}$  uma coloração total de  $K_{\Delta+1}$ . Para facilitar a escrita, identificaremos os vértices de  $K_{\Delta+1}$  com a cor associada a ele por  $c'$ . Novamente, por comodidade, suponhamos que as cores  $1, 2, 3, \dots, \Delta+1$  foram usadas para colorir os vértices de  $K_{\Delta+1}$ , tomando como base, por exemplo, o processo de construção indutiva. Vamos estender a coloração  $c$  às arestas de  $G$  da seguinte forma:

Definimos a aplicação  $f: V \rightarrow V'$  da seguinte forma,  $f(u) = i$  onde  $i$  é o vértice de  $K_{\Delta+1}$ , tal que  $c(u) = c'(i)$ . Agora para cada aresta  $uv \in E$ , definimos  $c(uv) = c'(f(u)f(v))$ . Observe que a coloração assim definida é própria, pois, se duas arestas  $uv$  e  $uv'$  são incidentes

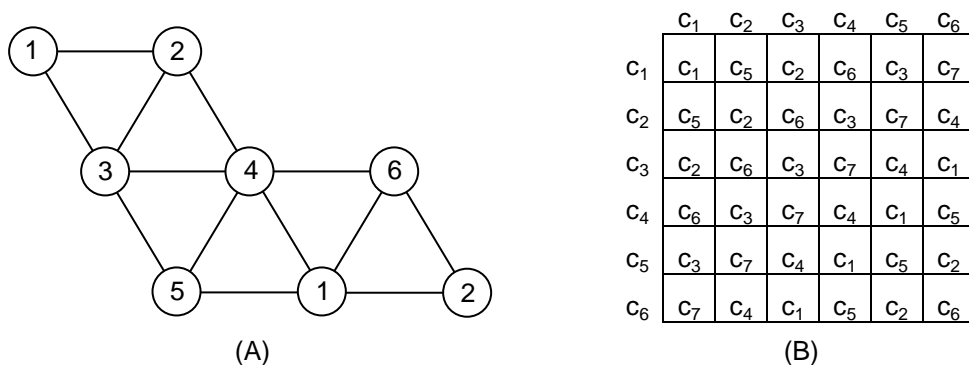
em  $u$  então  $c(v) \neq c(v')$ , conseqüentemente  $f(v) \neq f(v')$  e como  $c'(f(u)f(v)) \neq c'(f(u)f(v'))$ , então  $c(uv) \neq c(uv')$ . Por outro lado, se uma aresta  $uv \in E$  é incidente no vértice  $v \in V$ , então  $c'(f(v)) \neq c'(f(u)f(v))$ , e daí  $c(u) \neq c(uv)$ .  $\square$

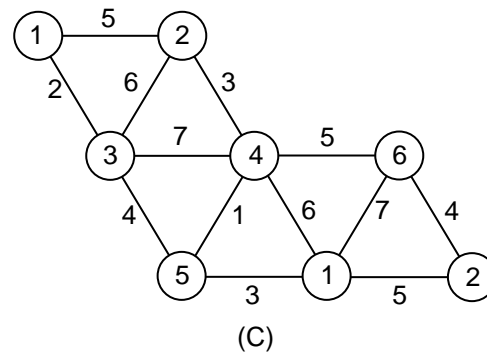
A Figura 2.9(B) mostra a coloração total de um grafo 2-caminho, tomando como base a coloração total do  $K_6$ , Figura 2.9(A).



**Figura 2.9.** Coloração total de um grafo 2-caminho com  $\Delta + 2$  cores.

Uma outra possibilidade é utilizar um quadrado latino para colorir as arestas de um grafo  $G$  que possui uma  $(\Delta + 1)$ -coloração com folga  $\Delta$  para os seus vértices. Inicialmente, colore-se o grafo 2-caminho de acordo com o Teorema 2.2, Figura 2.10(A). Em seguida, constrói-se um quadrado latino de ordem  $\Delta + 1$ , tomando como base as cores  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  e  $c_6$ , como mostra a Figura 2.10(B). Finalizando, as arestas são coloridas, respeitando-se a construção deste quadrado, Figura 2.10(C).



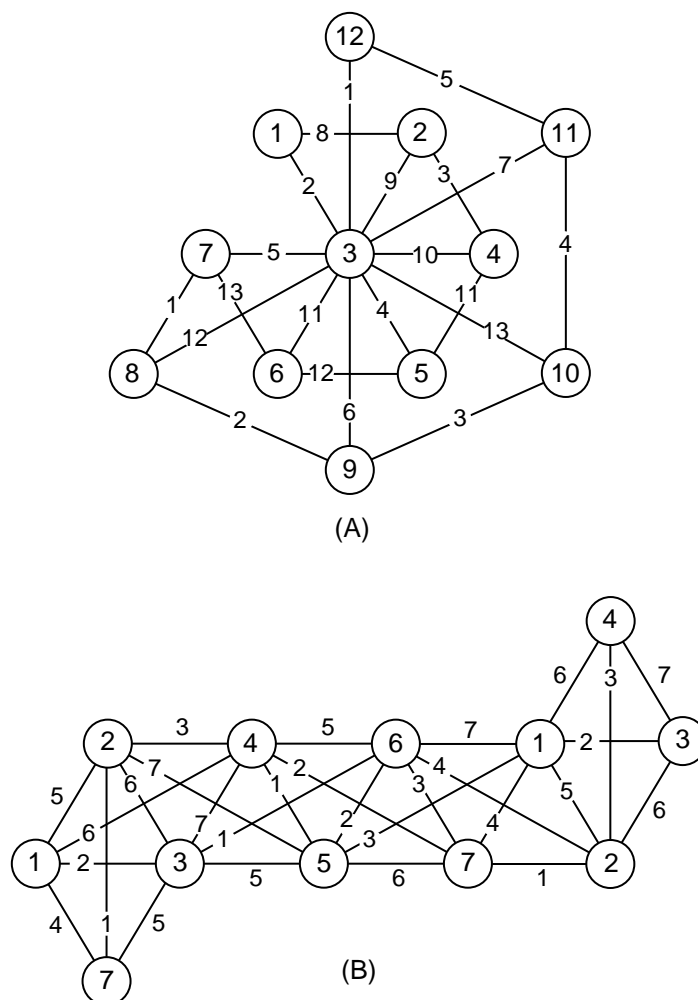


**Figura 2.10.** Coloração total de um grafo 2-caminho, com o auxílio de um quadrado latino.

**Corolário 2.1.** *Todo grafo  $k$ -caminho satisfaz a conjectura de Vizing para coloração total.*

**Prova.** Pelo Teorema 2.2, tem-se que para todo grafo  $k$ -caminho existe uma  $(\Delta + 1)$ -coloração com folga  $\Delta$ . Por outro lado, pelo Teorema 2.3, sabe-se que existe uma coloração total com no máximo  $\Delta + 2$  cores, para todo grafo  $G(V, E)$  que possui uma  $(\Delta + 1)$ -coloração com folga  $\Delta$ . Com isso, infere-se que para todo grafo  $k$ -caminho existe uma coloração total com no máximo  $\Delta + 2$  cores, o que satisfaz a conjectura de Vizing.  $\square$

A Figura 2.11(A) a seguir mostra a coloração total de um grafo 2-caminho usando  $\Delta + 2$  cores, enquanto que em (B) tem-se a coloração total de um grafo 3-caminho com  $\Delta + 1$  cores.



**Figura 2.11.** Coloração total de grafos 2-caminho e 3-caminho, respectivamente.

Este capítulo teve como objetivo apresentar uma técnica chamada de **extensão natural de uma coloração com folga de ordem  $\Delta$** . Para isso, fez-se uma breve revisão de coloração de vértices, arestas e total, além de apresentar o conceito de coloração de vértices com folga. Como exemplo, provou-se ser possível a coloração com folga em grafos  $k$ -caminho. Em seguida, utilizou-se a extensão natural desta coloração para mostrar que todo grafo  $k$ -caminho se pode colorir totalmente com  $\Delta + 2$  cores.

A técnica de completamento de cores, descrita neste capítulo, juntamente com o conceito de produto funcional de grafos, que será introduzido a frente, terão papel

fundamental na coloração total equilibrada em subfamílias de grafos regulares, que será apresentada mais adiante.



## Capítulo 3

### Produto Funcional de Grafos

#### 3.1. Introdução

Este capítulo tem como objetivo apresentar algumas novas ideias, que tomam como base o conceito de **produto cartesiano de grafos** estabelecido por SABIDUSSI (1960) e VIZING (1963). Inicialmente, o conceito de produto cartesiano foi estendido para digrafos, o que propiciou a inserção de um novo tipo de produto de grafos chamado aqui de **produto funcional de grafos**. O capítulo termina com a generalização deste produto funcional. Para embasar esta etapa do trabalho, além das referências mencionadas acima, utilizou-se ainda: BONDY e MURTY (1976), BOAVENTURA NETTO (1996), SEOUD *et al.* (1997), ZMAZEK e ZEROVNIK (2000), KEMNITZ e MARANGIO (2003), CHUNLING *et al.* (2009), PRNAVER e ZMAZEK (2009), FRIEDMANN *et al.* (2011).

### 3.2. Produto Cartesiano de Grafos e Digrafos

A seguir, será apresentado o produto cartesiano de dois grafos. Por definição, o **produto cartesiano** de dois conjuntos não vazios  $A$  e  $B$ , representado por  $A \times B$ , é dado por:  $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$ .

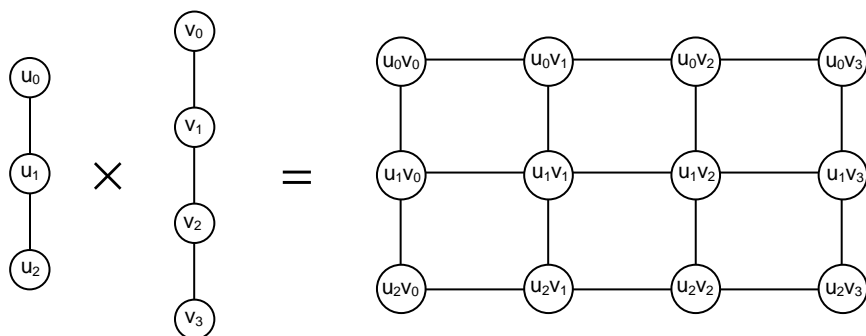
**Definição 3.1.** O **produto cartesiano de dois grafos**  $G$  e  $H$ ,  $G \times H$ , é o grafo cujo conjunto de vértices é o produto cartesiano  $V(G) \times V(H)$ . Dois vértices  $(u, v)$  e  $(u', v')$  são adjacentes se, e somente se,

- (i)  $u = u'$  e a aresta  $vv' \in E(H)$  ou
- (ii)  $v = v'$  e a aresta  $uu' \in E(G)$ .

Os grafos  $G$  e  $H$  do produto cartesiano  $G \times H$  são ditos fatores do produto. Claramente,  $\Delta(G \times H) = \Delta(G) + \Delta(H)$ .

Dentre os grafos resultantes de produtos cartesianos, os mais comuns são as grades (produto cartesiano entre dois caminhos,  $P_n \times P_n$ ), os prismas (produto cartesiano de um caminho por um ciclo,  $P_n \times C_n$ ) e os toros (produto cartesiano entre dois ciclos,  $C_n \times C_n$ ).

A Figura 3.1(A) mostra uma grade  $P_3 \times P_4$ , (B) um prisma  $P_3 \times C_4$  e (C) um toro  $C_3 \times C_4$ :



**Figura 3.1.** (A) Grade: produto cartesiano de  $P_3 \times P_4$

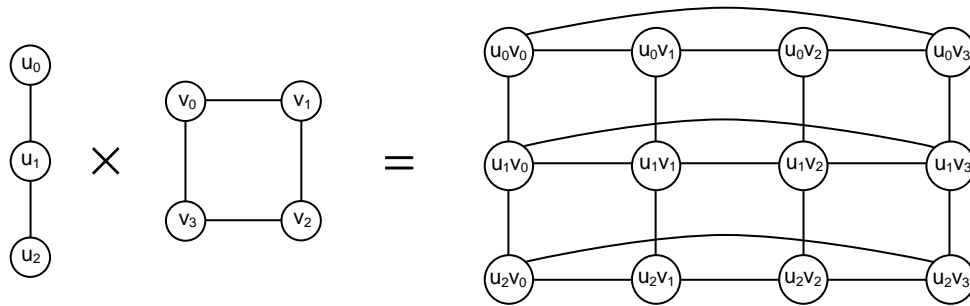


Figura 3.1. (B) Prisma: produto cartesiano de  $P_3 \times C_4$

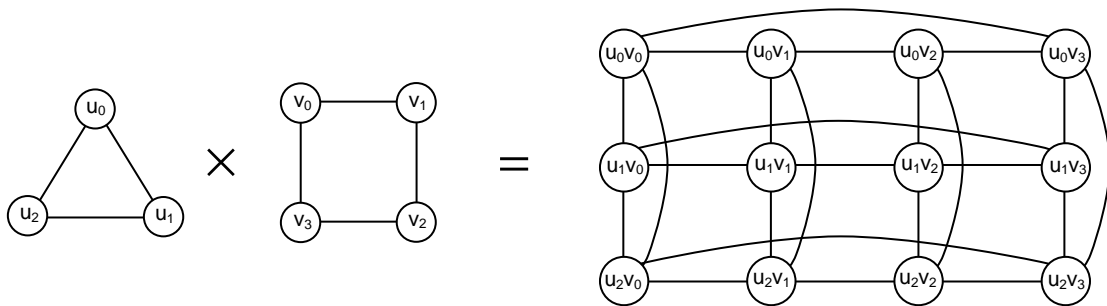
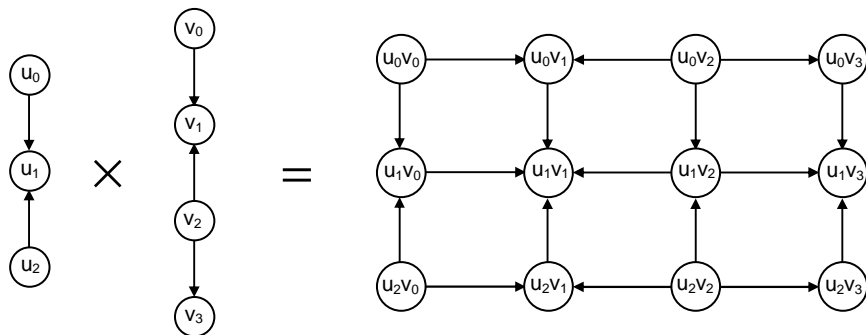


Figura 3.1. (C) Toro: produto cartesiano de  $C_3 \times C_4$ .

**Definição 3.2.** O produto cartesiano de dois digrafos  $\bar{G}$  e  $\bar{H}$ ,  $\bar{G} \times \bar{H}$ , é o digrafo cujo conjunto de vértices é o produto cartesiano  $V(\bar{G}) \times V(\bar{H})$ . Dois vértices  $(u, v)$  e  $(u', v')$  são adjacentes se, e somente se, uma das afirmativas abaixo for verdadeira:

- (i)  $u = u'$  e o arco  $vv' \in E(\bar{H})$
- (ii)  $u = u'$  e o arco  $v'v \in E(\bar{H})$
- (iii)  $v = v'$  e o arco  $uu' \in E(\bar{G})$
- (iv)  $v = v'$  e o arco  $u'u \in E(\bar{G})$ .

A Figura 3.2 mostra um produto cartesiano entre dois digrafos:



**Figura 3.2.** Produto cartesiano entre dois digrafos.

### 3.3. Produto Funcional de Grafos

A seguir, serão apresentados dois novos conceitos: produto funcional de grafos e digrafos. Para melhor entendimento desta seção, algumas definições iniciais se fazem necessárias. Dado um grafo  $G(V, E)$ , denota-se por  $D(G)$  o digrafo obtido pela substituição de cada aresta  $\{u, v\}$  pelos arcos  $(u, v)$  e  $(v, u)$ . Representa-se por  $\mathcal{D}$  o conjunto de todos os digrafos que satisfazem a seguinte condição:  $(u, v)$  é um arco do digrafo se, e somente se,  $(v, u)$  também é um arco do digrafo, isto é, um digrafo  $G'$  pertence a  $\mathcal{D}$  se e somente se  $G' = D(G)$ , para algum grafo  $G$ . Dado um digrafo  $\bar{G}(V, E) \in \mathcal{D}$ ,  $G(\bar{G})$  será o grafo obtido pela substituição de cada par de arcos  $(u, v) \in E$  e  $(v, u) \in E$  pela aresta  $\{u, v\}$ .

Dado um conjunto finito  $C$ , denotamos por  $F(C)$  o conjunto de todas as bijeções que existem de  $C$  em  $C$ . Por exemplo, sendo  $C = \{1, 2, 3\}$ ,  $F(C)$  pode ser descrito através do seguinte conjunto  $F(C) = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}$ , onde  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , representa cada bijeção de  $C$  em  $C$ . A Figura 3.3 ilustra essas bijeções:

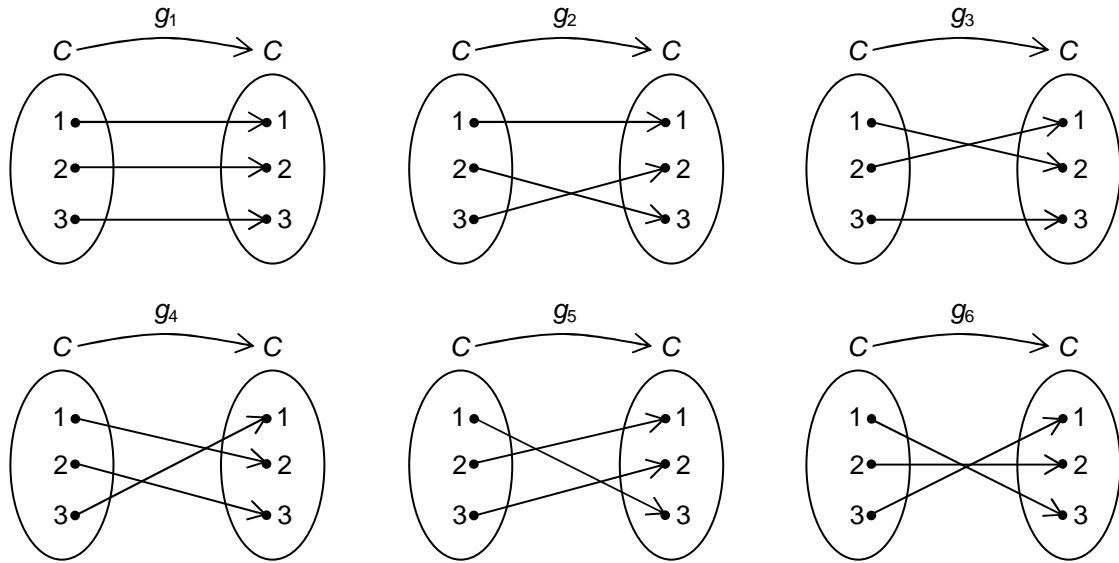


Figura 3.3. Bijeções de  $C$  em  $C$ .

**Definição 3.3. (Ligação Funcional de Digrafos).** Os digrafos  $\bar{G}_1(V_1, E_1)$  e  $\bar{G}_2(V_2, E_2)$  são ditos **funcionalmente ligados** pelas aplicações  $f_1: E_1 \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2: E_2 \rightarrow F(V_1)$ , se  $f_1$  e  $f_2$  são tais que:

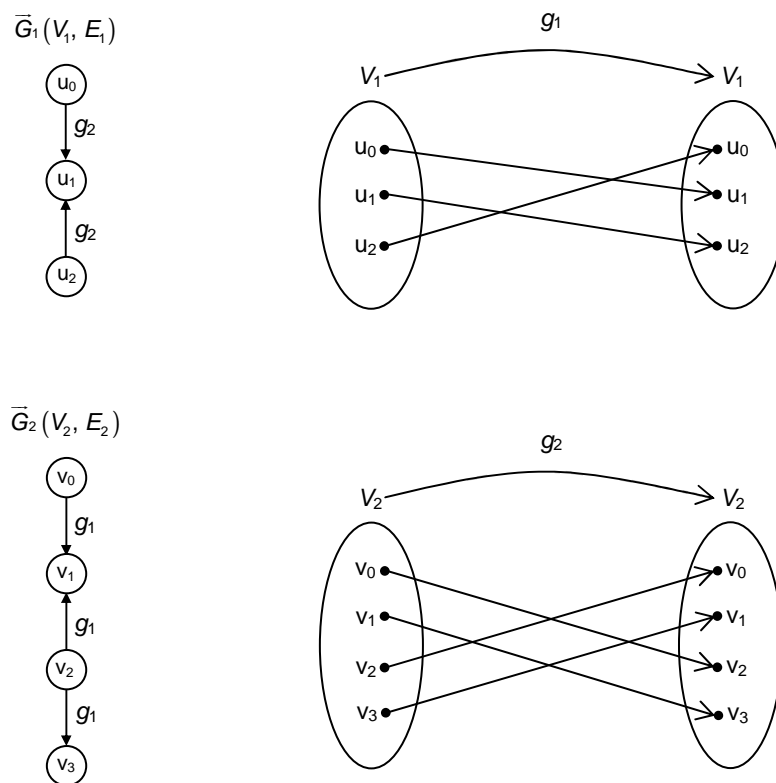
- (i) Se  $(u, v) \in E_1$  e  $(v, u) \in E_1$  então  $f_1((u, v)) = (f_1((v, u)))^{-1}$
- (ii) Se  $(x, y) \in E_2$  e  $(y, x) \in E_2$  então  $f_2((x, y)) = (f_2((y, x)))^{-1}$
- (iii) Se  $(u, v) \in E_1$  e  $(x, y) \in E_2$  então  $f_2((x, y))(u) \neq v$  ou  $f_1((u, v))(x) \neq y$ .

As aplicações  $f_1$  e  $f_2$  são denominadas **aplicações de ligação**.

**Definição 3.4. (Produto Funcional de Digrafos).** Sejam  $\bar{G}_1(V_1, E_1)$  e  $\bar{G}_2(V_2, E_2)$  digrafos funcionalmente ligados pelas aplicações  $f_1: E_1 \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2: E_2 \rightarrow F(V_1)$ . O **produto dos digrafos**  $\bar{G}_1$  e  $\bar{G}_2$ , segundo as aplicações  $f_1$  e  $f_2$ , representado por  $(f_1, \bar{G}_1) \times (f_2, \bar{G}_2)$ , é o digrafo  $\bar{G}^*(V^*, E^*)$  definido por:

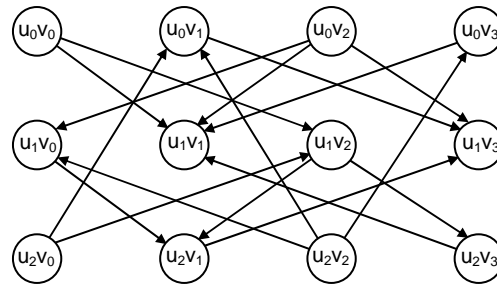
- (i)  $V^* = V_1 \times V_2$
- (ii)  $((u, x), (v, y)) \in E^*$  se, e somente se, uma das seguintes condições for verdadeira:
- (a)  $(u, v) \in E_1$  e  $y = f_1((u, v))(x)$
- (b)  $(x, y) \in E_2$  e  $v = f_2((x, y))(u)$ .

Como exemplo, a Figura 3.4 mostra os digrafos  $\bar{G}_1(V_1, E_1)$  e  $\bar{G}_2(V_2, E_2)$  ligados pelas bijeções  $f_1$  e  $f_2$ , definidas por  $f_1(x) = g_2$ , para todo arco  $x \in E_1$ , e  $f_2(x) = g_1$ , para todo  $x \in E_2$ .



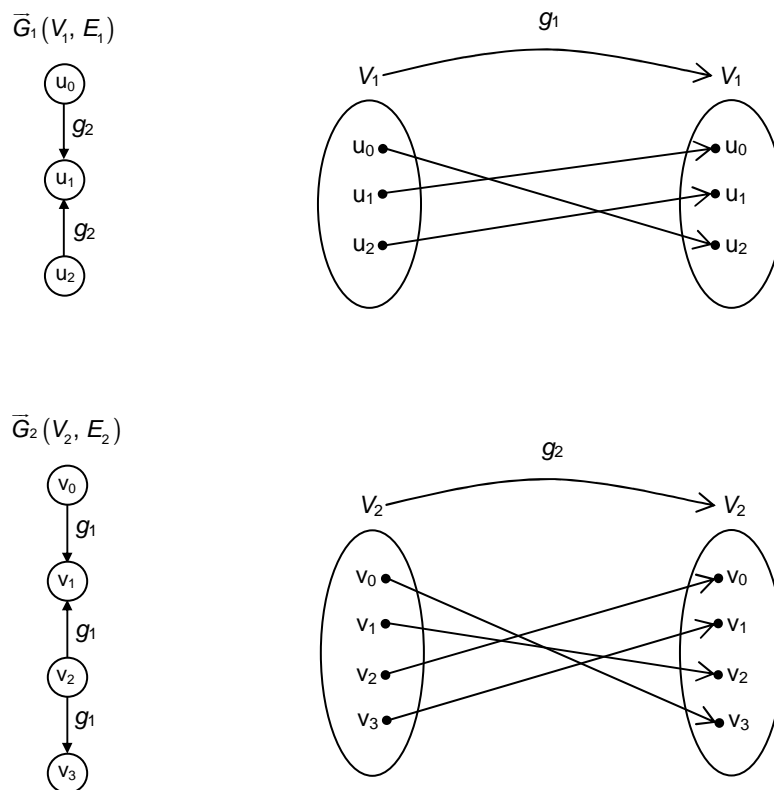
**Figura 3.4.** Digrafos  $\bar{G}_1$  e  $\bar{G}_2$  ligados pelas bijeções  $f_1$  e  $f_2$ .

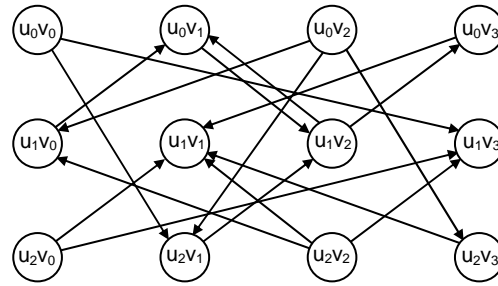
A Figura 3.5 mostra o produto dos digrafos  $\bar{G}_1(V_1, E_1)$  e  $\bar{G}_2(V_2, E_2)$ , segundo as funções  $f_1: E_1 \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2: E_2 \rightarrow F(V_1)$ :



**Figura 3.5.** Produto funcional entre os digrafos  $\bar{G}_1$  e  $\bar{G}_2$ , segundo  $f_1$  e  $f_2$ .

Observe que, num produto funcional de digrafos, mantendo-se os mesmos fatores  $\bar{G}_1$  e  $\bar{G}_2$  e mudando as aplicações  $h_1 : E_1 \rightarrow F(V_2)$  e  $h_2 : E_2 \rightarrow F(V_1)$ , obtêm-se digrafos distintos. Na Figura 3.6, os digrafos são os mesmos do exemplo anterior, havendo mudanças apenas nas funções  $g_1$  e  $g_2$ :





**Figura 3.6.** Produto funcional entre os digrafos  $\bar{G}_1$  e  $\bar{G}_2$ , segundo outras funções  $f_1$  e  $f_2$ .

**Definição 3.5. (Ligação Funcional de Grafos).** Os grafos  $G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$  são ditos **funcionalmente ligados** pelas aplicações  $f_1: E(D(G_1)) \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2: E(D(G_2)) \rightarrow F(V_1)$  se os digrafos  $D(G_1)$  e  $D(G_2)$  são funcionalmente ligados pelas mesmas aplicações.

**Definição 3.6. (Produto Funcional de Grafos).** Sejam  $G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$  grafos funcionalmente ligados pelas aplicações  $f_1: E(D(G_1)) \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2: E(D(G_2)) \rightarrow F(V_1)$ . Define-se o **produto** de  $G_1$  por  $G_2$  segundo às aplicações  $f_1$  e  $f_2$ , e representado por  $(f_1, G_1) \times (f_2, G_2)$ , como sendo o grafo  $G((f_1, D(G_1)) \times (f_2, D(G_2)))$ .

Como exemplo, segue abaixo o produto funcional entre dois caminhos  $P_3$ , isto é,  $(f_1, P_3) \times (f_2, P_3)$ . É importante ressaltar que, a partir dos grafos originais, geram-se digrafos após a substituição de cada aresta  $\{u, v\}$  pelos arcos  $(u, v)$  e  $(v, u)$ . Em seguida, é feito o produto funcional entre estes digrafos, como visto anteriormente. Finalmente, obtém-se o grafo final a partir da substituição dos arcos  $(u, v)$  e  $(v, u)$  pela aresta  $\{u, v\}$ . As Figuras 3.7, 3.8 e 3.9 ilustram esta sequência descrita acima:



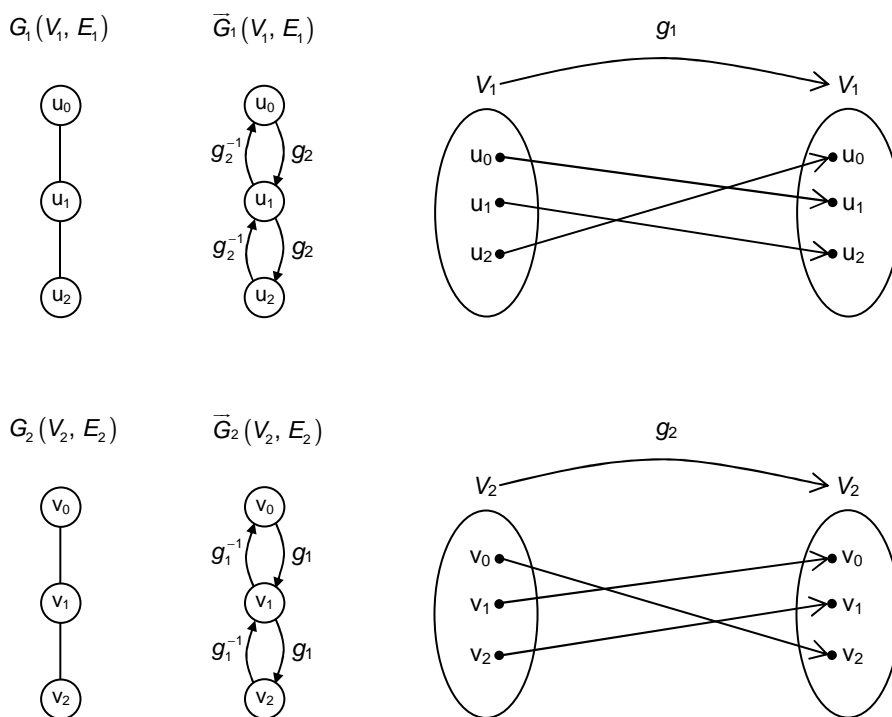


Figura 3.7.  $G_1$ ,  $G_2$ , seus respectivos digrafos  $\bar{G}_1$ ,  $\bar{G}_2$  e as funções  $f_1$  e  $f_2$ .

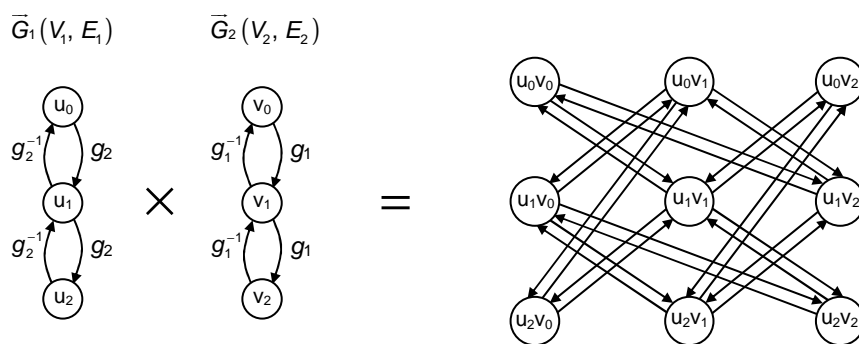


Figura 3.8. Produto funcional entre os digrafos  $\bar{G}_1$ ,  $\bar{G}_2$ , segundo  $f_1$  e  $f_2$ .

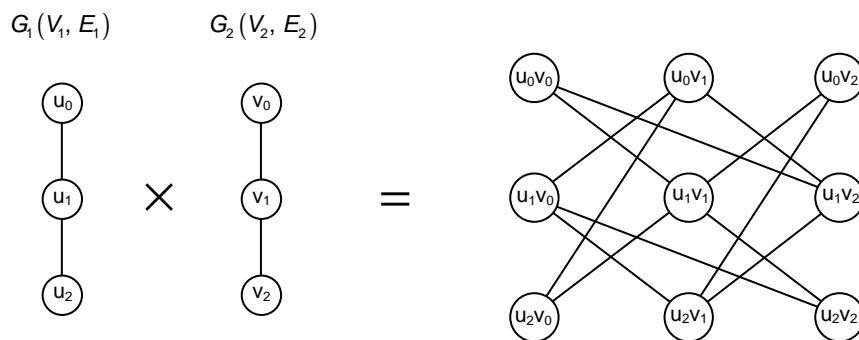
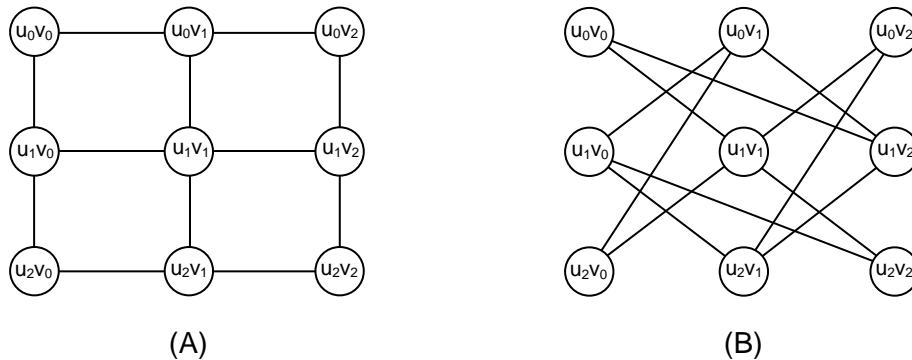


Figura 3.9. Produto funcional entre os grafos  $G_1$  e  $G_2$ , segundo  $f_1$  e  $f_2$ .

A Figura 3.10 compara o produto cartesiano usual de grafos (A) com o produto funcional de grafos segundo  $f_1$  e  $f_2$  (B):



**Figura 3.10.** (A) Produto cartesiano de  $G_1 \times G_2$  e (B) Produto funcional de  $G_1 \times G_2$ .

Outra situação que pode ocorrer ao se unir um produto cartesiano usual com uma função que associa arco (aresta) a permutação de vértices, é que essas funções  $f_1$  e  $f_2$  podem diferir de arco (aresta) para arco (aresta). Até o momento, utilizou-se uma aplicação constante  $f_1$  para associar  $E_2$  a  $F(V_1)$  e  $f_2$  para associar  $E_1$  a  $F(V_2)$ . O que se pretende é generalizar, isto é, utilizar funções diferentes para arcos (arestas) diferentes, podendo, entretanto, existir dois (duas) ou mais arcos (arestas) com a mesma função  $f$ . Observe, por exemplo, que o número de bijeções de  $V_1$  em  $V_1$  é dado por  $n_1!$ , onde  $|V_1| = n_1$ . O mesmo raciocínio se aplica a  $V_2$ .

A Figura 3.11 abaixo ilustra o produto funcional generalizado entre dois digrafos  $\bar{G}_1$  e  $\bar{G}_2$ , tomando como base aplicações de ligação distintas. Em (A) tem-se três funções  $f_1: E_2 \rightarrow F(V_1)$ , (B) mostra duas funções  $f_2: E_1 \rightarrow F(V_2)$ , enquanto (C) exhibe o produto funcional generalizado entre estes digrafos. Utilizou-se  $g_1, g_2$  e  $g_3$  para representar as bijeções de  $V_1$  em  $V_1$  e  $g_2$  e  $g_2$  para as bijeções de  $V_2$  em  $V_2$ .

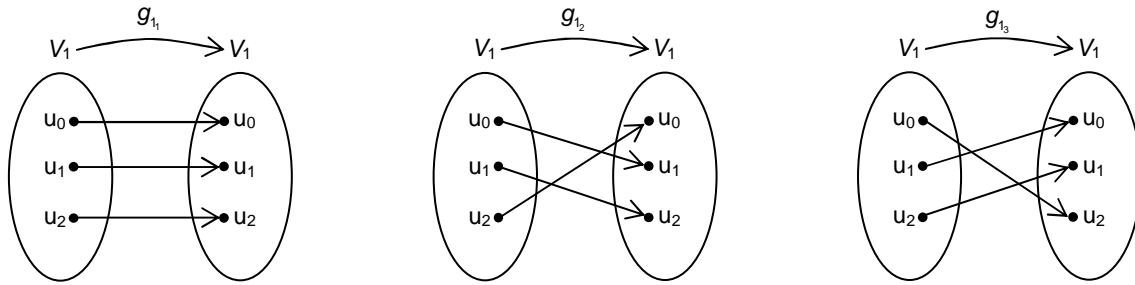


Figura 3.11. (A) Três funções  $f_i: E_2 \rightarrow F(V_1)$  distintas.

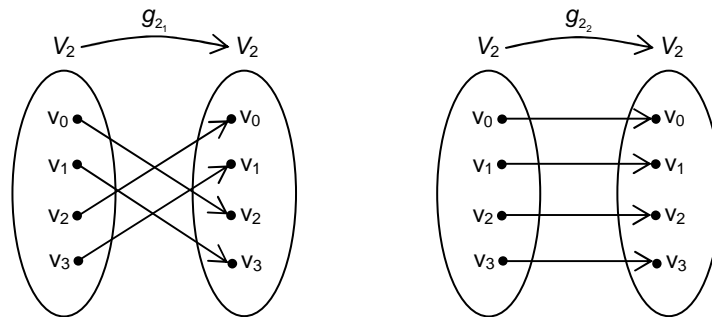


Figura 3.11. (B) Duas funções  $f_2: E_1 \rightarrow F(V_2)$  distintas.

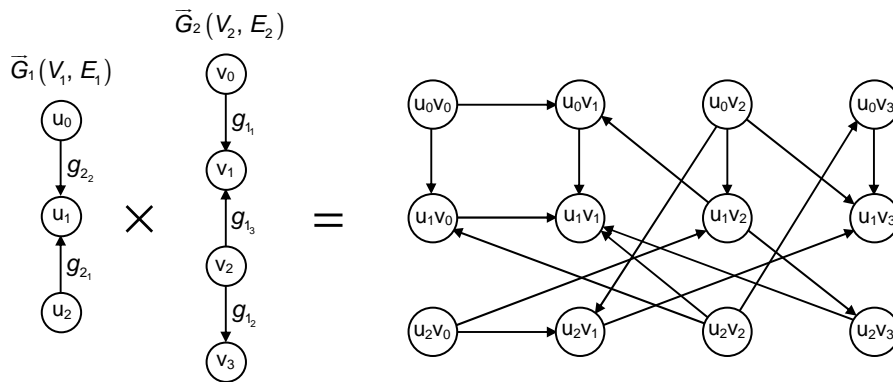


Figura 3.11. (C) Produto funcional generalizado entre dois digrafos.

Nas Figuras 3.12, 3.13 e 3.14, pode-se observar o produto funcional generalizado entre dois grafos, tomando como base as mesmas aplicações de ligação descritas acima. Em 3.12 tem-se a geração dos digrafos  $\bar{G}_1$  e  $\bar{G}_2$ , a partir dos grafos  $G_1$  e  $G_2$ , enquanto que 3.13 mostra o produto funcional generalizado entre estes digrafos. Finalmente, em 3.14, tem-se o grafo resultante deste produto.

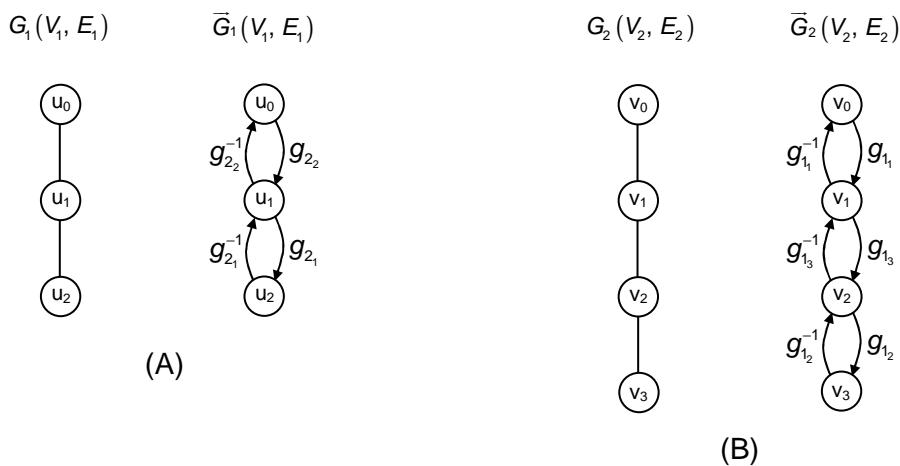


Figura 3.12. (A) Transformação de  $G_1$  em  $\bar{G}_1$  e (B) Transformação de  $G_2$  em  $\bar{G}_2$ .

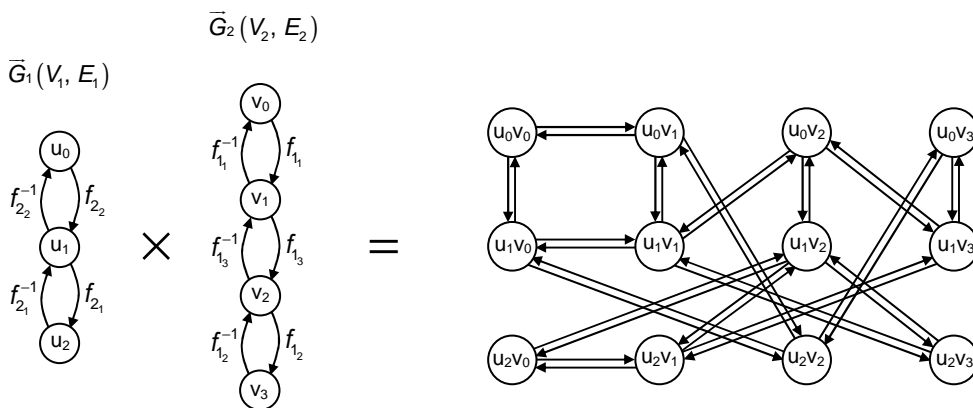


Figura 3.13. Produto funcional generalizado entre os digrafos  $\bar{G}_1$  e  $\bar{G}_2$ .

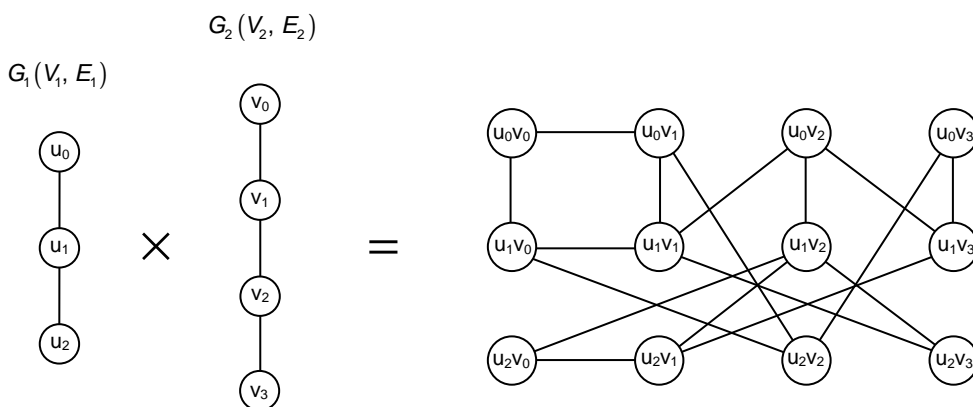


Figura 3.14. Produto funcional generalizado entre os grafos  $G_1$  e  $G_2$ .

Associado ao estudo do produto funcional de grafos, ideia central do objetivo proposto neste capítulo, abordou-se o produto funcional de digrafos e o produto funcional generalizado destas duas famílias.

No próximo capítulo, o assunto abordado será a coloração total equilibrada em subfamílias de grafos regulares que são gerados a partir dos produtos cartesiano e funcional de grafos que satisfazem certas condições.

# Capítulo 4

## Coloração Total Equilibrada em Subfamílias de Grafos Regulares

### 4.1. Introdução

Este capítulo tem como objetivo apresentar outras novas ideias. Juntamente com o capítulo anterior, os conceitos e resultados aqui expostos formam o eixo principal deste trabalho. HOLYER (1981), YAP (1986), YAP (1996), ISOBE (2002), LOZANO (2005), FROTA (2008), LOZANO, FRIEDMANN, WAGA e MARKENZON (2009), FRIEDMANN, MARKENZON, LOZANO e WAGA (2011), serviram de base para esta fase do trabalho.

### 4.2. Rotação

A seguir, serão apresentadas duas definições que têm por objetivo auxiliar o restante do capítulo.

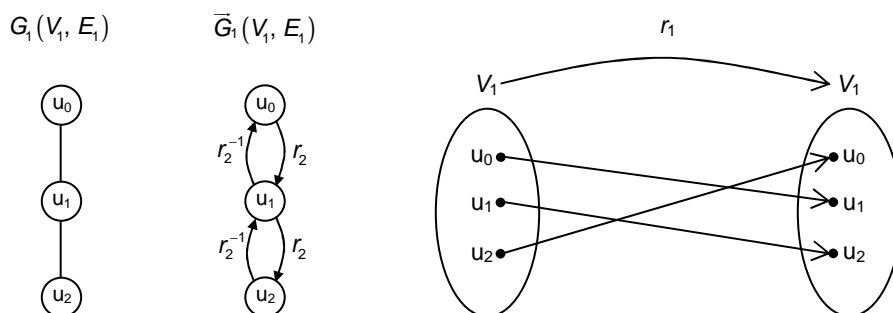
**Definição 4.1.** Uma **rotação em  $I_n$**  é uma bijeção  $f: I_n \rightarrow I_n$  definida recursivamente como segue:

- (i)  $f(0) = i, i \in I_n$
- (ii)  $f((i+1)(\text{mod } n)) = (f(i) + 1)(\text{mod } n)$ .

**Definição 4.2. (Rotação em um conjunto finito).** Dado um conjunto finito  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ , uma bijeção  $r: V \rightarrow V$  é uma rotação em  $V$ , se  $r(v_i) = v_{f(i)}$ , onde  $f$  é uma rotação em  $I_n$ .

Observe que para um conjunto  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , com  $k + 1$  elementos, existem exatamente  $k + 1$  rotações. Note também que, como cada rotação é definida recursivamente, basta saber o valor da rotação para  $v_0$  para poder defini-la. Por este motivo, para um conjunto  $V$  como descrito acima, seja  $r_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ , a rotação tal que  $r_i(v_0) = v_i$ . Define-se também  $r_i^{-1} = r_{k+1-i}$ .

A Figura 4.1 mostra o produto de um caminho de comprimento 3 por um outro caminho de comprimento 3, usando como funções as rotações no conjunto de vértices:



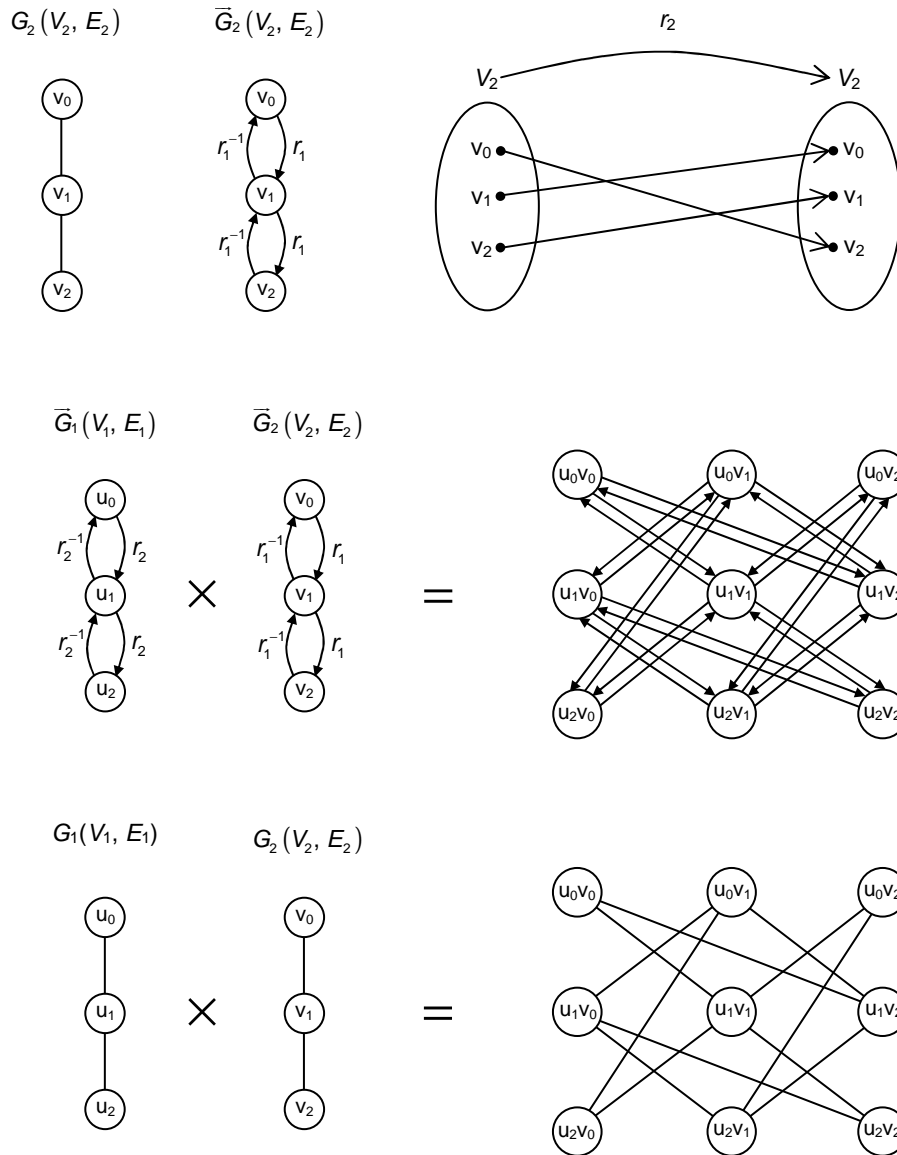


Figura 4.1. Produto de  $G_1 \times G_2$  usando como funções as rotações no conjunto de vértices.

### 4.3. Grafo Suporte

A seguir, será apresentado o conceito de grafo suporte. Este grafo, que é regular, tem como objetivo principal servir como gerador de uma família de grafos regulares que podem ser coloridos total e equilibradamente com no máximo  $\Delta + 2$  cores.



**Definição 4.3.** Um grafo  $G(V, E)$  é um  **$k$ -suporte** se satisfaz as seguintes condições:

- i)  $G$  é um grafo regular de grau  $k - 3$ ;
- ii) Existem aplicações  $f_1: E(D(G)) \rightarrow F(V(C_k))$  e  $f_2: E(D(C_k)) \rightarrow F(V)$ , tais que  $G$  e  $C_k$  estão funcionalmente ligados por  $f_1$  e  $f_2$ ;
- iii) O grafo  $G^* = (f_1, G) \times (f_2, C_k)$  pode ser colorido com folga  $\Delta(G^*)$  com  $\Delta(G^*) + 1$  cores.

#### 4.4. Principais Resultados

Nesta seção, serão apresentados sete teoremas que tem como objetivo principal mostrar que a partir dos grafos suporte é possível encontrar uma subfamília de grafos regulares, que podem ser coloridos total e equilibradamente com  $\Delta + 2$  cores no máximo. Essa família recebeu o nome de **Grafos Harmônicos**.

**Teorema 4.1.** Se  $G(V, E)$  é um grafo  $k$ -regular de classe 1, então  $G$  é  $(k + 3)$ -suporte.

**Prova.** Sejam  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $V(C_{k+3}) = \{u_0, u_1, \dots, u_{k+2}\}$ ,  $C = \{2, 3, 4, \dots, k + 1\}$  conjuntos, e  $c: E \rightarrow C$ , uma coloração de arestas de  $G$  usando o conjunto  $C$ . A prova será dividida em dois casos:

**Caso 1.**  $k = \Delta(G)$  é par:

Observe que  $2 + (k + 1) = 3 + k = 4 + (k - 1) = \dots = \left(\frac{k}{2} + 1\right) + \left(\frac{k}{2} + 2\right) = k + 3$ , e denota-

se por  $i$  o número  $(k + 3) - i$ , para todo  $i \in \left\{2, 3, \dots, \left(\frac{k}{2} + 1\right)\right\}$ . Veja agora que para

cada  $\{i, i'\}$ , o subgrafo  $G_i(V_i, E_i)$  induzido pelo conjunto das arestas  $\{e \in E: c(e) = i \text{ ou } c(e) = i'\}$  é um grafo regular de grau 2 e que  $V = V_i$ . Logo, as componentes conexas de cada subgrafo  $G_i$  são ciclos  $G_{i_1}, \dots, G_{i_{t_i}}$ ,  $t_i \in \mathbb{N}$ ,  $t_i \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ , onde cada ciclo  $G_{ij}$  está associado a dois ciclos orientados  $\vec{G}_{ij}^1$  e  $\vec{G}_{ij}^2$  em  $D(G)$ . Definem-se as aplicações  $f_1: E(D(G)) \rightarrow V(C_{\Delta+3})$  e  $f_2: E(D(C_{\Delta+3})) \rightarrow V$  como segue:

$$f_1(x) = \begin{cases} r_i & \text{se } x \in E(\vec{G}_{ij}^1); i \in \left\{2, 3, \dots, \frac{k}{2} + 1\right\}; j \in \{1, 2, \dots, t_i\} \\ r_{i'} & \text{se } x \in E(\vec{G}_{ij}^2); i \in \left\{2, 3, \dots, \frac{k}{2} + 1\right\}; j \in \{1, 2, \dots, t_i\} \end{cases}$$

$f_2(x) = Id$ , para todo arco  $x \in D(C_{\Delta+3})$ , onde  $Id$  representa a função identidade.

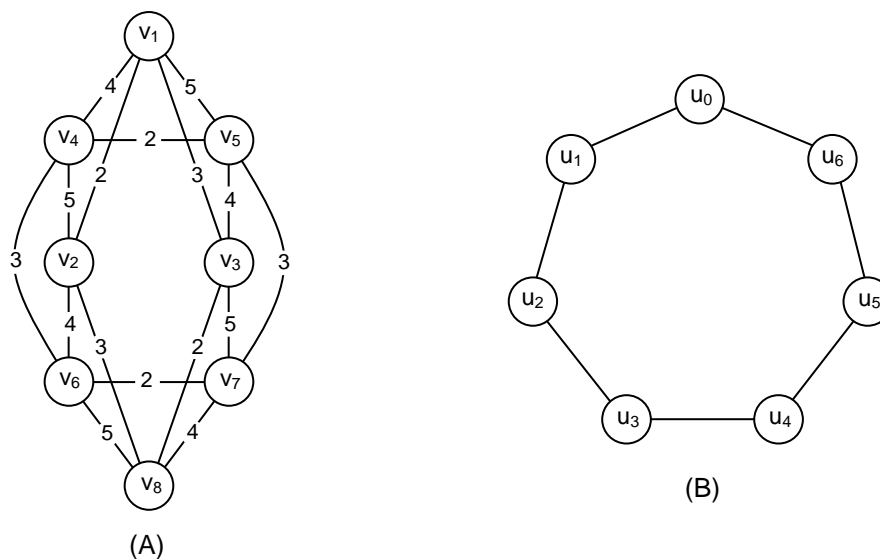
Sejam agora  $G^* = (f_1, G) \times (f_2, C_{\Delta+3})$ ,  $V^* = V(G^*)$ ,  $E^* = E(G^*)$ . A coloração  $f: V^* \rightarrow \{0, 1, \dots, (k+2)\}$  definida por  $c((v_i, u_j)) = j$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 0, 1, 2, \dots, (k+2)$  é uma coloração com folga  $\Delta(V^*)$  com  $\Delta(V^*) + 1$  “cores” do grafo  $G^*$ . O conjunto de “cores”  $\{0, 1, 2, \dots, (k+2)\}$  possui  $k+3$  elementos e é fácil ver que o grafo  $G^*$  é um grafo regular de grau  $\Delta(G) + \Delta(C_{\Delta+3}) = k+2$ . Para analisar que a coloração tem folga  $\Delta(G^*)$ , observe que por simetria basta analisar um vértice de  $V^*$ , por exemplo,  $(v_1, u_0)$ . Sendo  $N_G(v_1) = \{x_2, \dots, x_{k+1}\}$ , por facilidade e sem perder a generalidade, suponha que  $c(v_1, x_j) = j$ ,  $j \in \{2, \dots, k+1\}$ , então os extremos dos arcos  $(f_1, \vec{G}) \times (f_2, \vec{C}_{\Delta+3})$  que tem como origem  $(v_1, u_0)$  são  $(v_1, u_1)$ ,  $(v_1, u_{k+2})$ ,  $(x_2, u_2)$ ,  $(x_3, u_3)$ ,  $(x_4, u_4)$ ,  $\dots$ ,  $(x_{k+1}, u_{k+1})$  coloridos com as “cores”  $1, k+2, 2, 3, \dots, k+1$ , respectivamente. Logo, a coloração possui folga  $\Delta$ .

**Caso 2.**  $k = \Delta(G)$  é ímpar:

Observe que  $2 + (k+1) = 3 + k = 4 + (k-1) = \dots = \left(\frac{k-1}{2} + 1\right) + \left(\frac{k+3}{2} + 1\right) = \left(\frac{k+1}{2} + 1\right) + \left(\frac{k+1}{2} + 1\right) = k+3$ , e denota-se por  $i'$  o número  $(k+3) - i$ , para todo  $i \in$

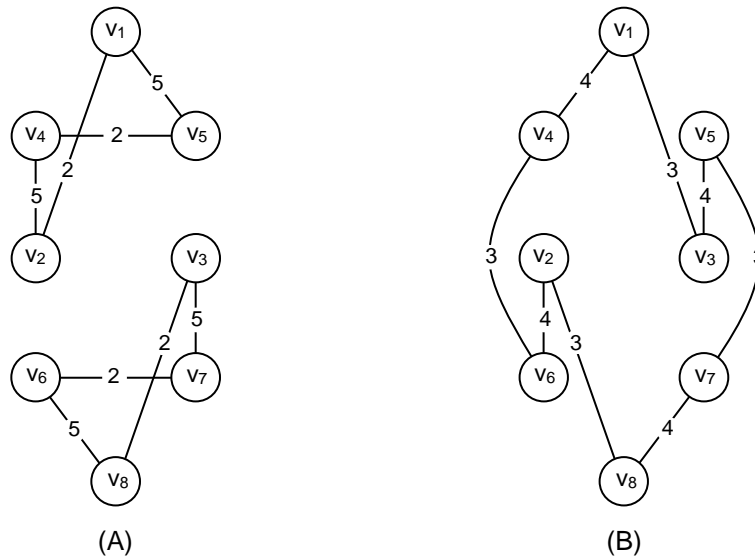
$\left\{2, 3, \dots, \left(\frac{k+1}{2} + 1\right)\right\}$ . Agora o subgrafo  $G_i(V_i, E_i)$  induzido pelo conjunto da arestas  $\{e \in E: c(e) = i \text{ ou } c(e) = i'\}$ ,  $i \in \left\{2, 3, \dots, \left(\frac{k-1}{2} + 1\right)\right\}$  é um grafo regular de grau 2, e o subgrafo  $G_a$ , com  $a = \frac{k+1}{2} + 1$ , induzido pelo conjuntos de arestas  $\left\{e \in E: c(e) = \frac{k+1}{2} + 1\right\}$  é um emparelhamento perfeito, e o raciocínio seguido no caso 1 é válido, o que prova o teorema.

A Figura 4.2 ilustra algumas etapas do Teorema 4.1 para o caso em que  $k = \Delta(G) = 4$ . A Figura 4.2(A) mostra um grafo 4-regular de classe 1, onde  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_8\}$  e  $C = \{2, 3, 4, 5\}$ , enquanto na Figura 4.2(B) tem-se um ciclo de comprimento 7,  $C_7$ , com  $V(C_7) = \{u_0, u_1, \dots, u_6\}$ .



**Figura 4.2.** (A) Grafo 4-regular de classe 1 e (B) Ciclo de comprimento 7,  $C_7$ .

O próximo passo é encontrar o conjunto  $\{i, i'\}$ , sabendo que  $i' = (k + 3) - i$ , para todo  $i \in \{2, 3\}$ . Substituindo, encontram-se os conjuntos  $\{2, 5\}$  e  $\{3, 4\}$ , que por sua vez geram os ciclos  $G_2$  e  $G_3$ , como mostram as Figuras 4.3(A) e (B), respectivamente:



**Figura 4.3.** (A) Ciclos  $G_2$  gerados por  $\{2, 5\}$  e (B) Ciclo  $G_3$  gerado por  $\{3, 4\}$ .

Em seguida, definem-se as aplicações  $f_1: E(D(G)) \rightarrow V(C_7)$  e  $f_2: E(D(C_7)) \rightarrow V$  da seguinte forma:

$$f_1(x) = \begin{cases} r_i & \text{se } x \in E(\vec{G}_{ij}^1); i \in \{2, 3\}; j \in \{1, 2\} \\ r_i & \text{se } x \in E(\vec{G}_{ij}^2); i \in \{2, 3\}; j \in \{1, 2\} \end{cases}$$

$f_2(x) = Id$ , para todo arco  $x \in D(C_7)$ , onde  $Id$  representa a função identidade.

Sejam agora  $G^* = (f_1, G) \times (f_2, C_7)$ ,  $V^* = V(G^*)$ ,  $E^* = E(G^*)$ . A coloração  $f: V^* \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  definida por  $\alpha((v_i, u_j)) = j$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ ;  $j = 0, 1, 2, \dots, 6$  é uma coloração com folga 6 com 7 cores do grafo  $G^*$ . O conjunto de "cores"  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  possui 7 elementos e é fácil ver que o grafo  $G^*$  é um grafo regular de grau 6. Para analisar que a coloração tem folga 6, observe que por simetria basta analisar um vértice de  $V^*$ , por exemplo,  $(v_1, u_0)$ . Sendo  $N_G(v_1) = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ , por facilidade e sem perder a generalidade, suponha que  $\alpha(v_1, v_j) = j$ ,  $j \in \{2, 3, 4, 5\}$ , então os extremos dos arcos  $(f_1, \vec{G}) \times (f_2, \vec{C}_7)$  que tem como origem  $(v_1, u_0)$  são  $(v_1, u_1)$ ,  $(v_1, u_6)$ ,  $(v_2, u_2)$ ,  $(v_3, u_3)$ ,  $(v_4, u_4)$ ,  $(v_5, u_5)$  coloridos com as "cores" 1, 6, 2, 3, 4, 5 respectivamente. Logo, a coloração possui folga 6. A Figura 4.4 resume o que foi descrito neste parágrafo:

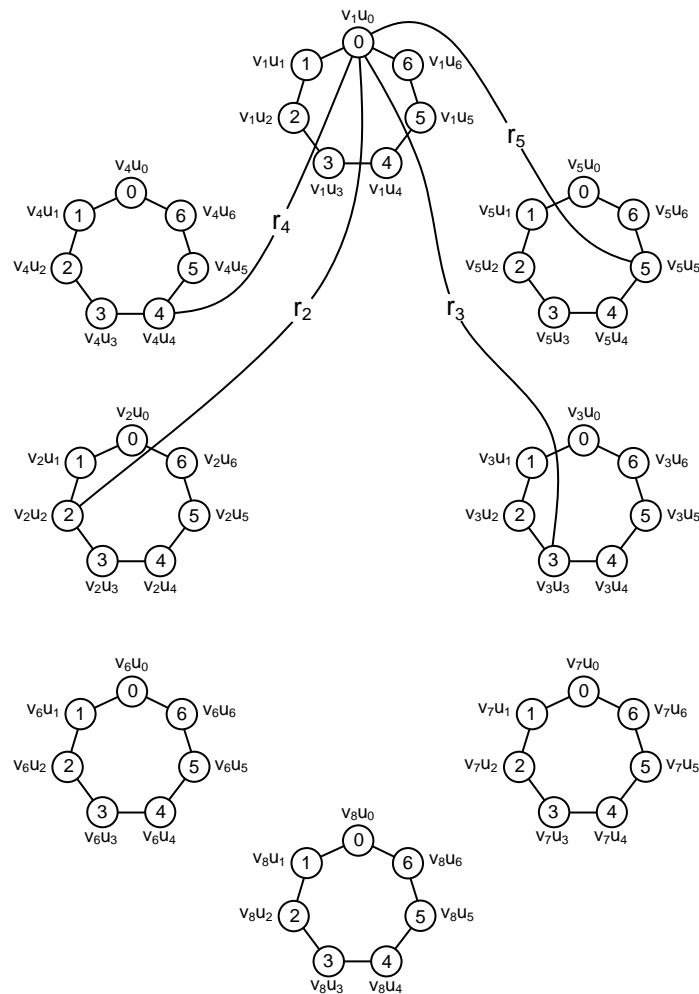


Figura 4.4. Início do processo de coloração com folga 6 com 7 cores do grafo  $G^*$ .

**Teorema 4.2.** Se  $G(V, E)$  é um grafo completo, então  $G$  é um  $(|V| + 2)$ -suporte.

**Prova.** Seja  $G(V, E) = K_n$ . Se  $n$  é par então  $G$  é de classe 1 e o teorema está provado, logo vamos supor que  $n$  é ímpar. Sejam  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$  e  $c: E \rightarrow C = \{0, 1, 2, \dots, n\}$  uma coloração de arestas de  $G$  definida por  $c(v_i, v_j) =$

$$\frac{(n+1)}{2}(i+j)(\text{mod } n); \quad i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}; \quad i \neq j. \quad \text{É claro que } c \text{ é própria, pois fixando } i_0$$

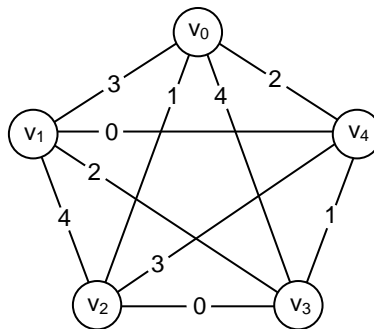
$\in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , temos que  $\frac{(n+1)}{2}(i_0 + j_0) \equiv \frac{(n+1)}{2}(i_0 + j_1)(\text{mod } n)$  se, e somente se,

$j_0 \equiv j_1 (\text{mod } n)$ . Antes de continuar com a prova do teorema, será necessário

provar a seguinte propriedade de  $c$ : se  $c_0 \in C$  está ausente no vértice  $v_{i_0}$  e

$c(\{v_0, v_i\}) = 0$  então  $c'_0$  está ausente no vértice  $v_i$ , onde  $c'_0$  denota o inverso aditivo de  $c_0 \pmod{n}$ . Observe inicialmente que para todo  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , a cor  $i$  está ausente nas arestas incidentes no vértice  $v_i$ , de fato,  $\frac{(n+1)}{2}(i+i) \equiv \frac{(n+1)}{2}(i+j) \pmod{n}$ , se e somente se,  $i \equiv j \pmod{n}$ , e como  $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , então  $i = j$ , mas  $G$  não possui laços, por outro lado  $\frac{(n+1)}{2}(i+j) \equiv 0 \pmod{n}$  se e somente se  $(i+j) \equiv 0 \pmod{n}$ , isto é,  $j \equiv -i \pmod{n}$ , de onde segue imediatamente a propriedade. Para cada  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  denota-se por  $e_i$  a aresta  $\{v_i, v_{-i}\}$ . Agora, para cada par de cores  $\{i, \bar{i}\}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}\}$ , o subgrafo gerado pelo conjunto de arestas  $\{e \in E: c(e) = i \text{ ou } c(e) = \bar{i}\} \cup \{e_i\}$  é um grafo regular de grau 2, e que deu origem a  $\frac{n-1}{2}$  ciclos que correspondem a  $n-1$  ciclos orientados. Define-se para cada  $i = 2, \dots, n$ , o seu inverso  $\bar{i}$  como sendo  $\bar{i} = n+2-i$ , e para cada par de ciclos orientados atribui-se aos seus arcos num sentido a função  $r_i$  e no outro  $r_{\bar{i}}$ . Isto e o raciocínio usado no Teorema 4.2 bastam para concluir a prova deste teorema.

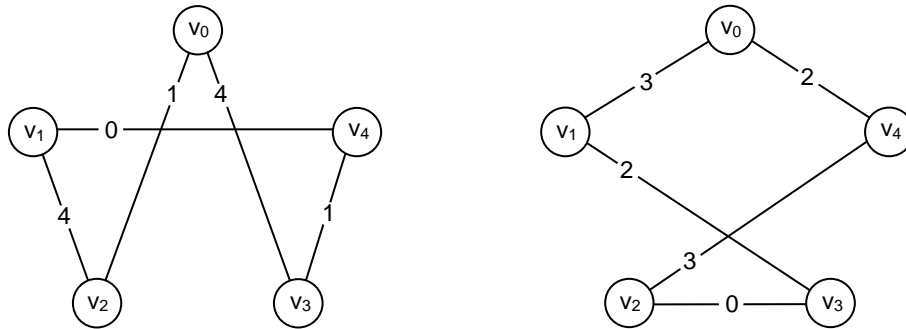
Algumas etapas do Teorema 4.2 estão ilustradas abaixo para o caso em que  $n = 5$ . A Figura 4.5 mostra um  $K_5$ , com  $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ , bem como a coloração de arestas própria definida por  $c(v_i, v_j) = \frac{(5+1)}{2}(i+j) \pmod{5}$ ;  $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ;  $i \neq j$ .



**Figura 4.5.**  $K_5$  e sua coloração de arestas própria.

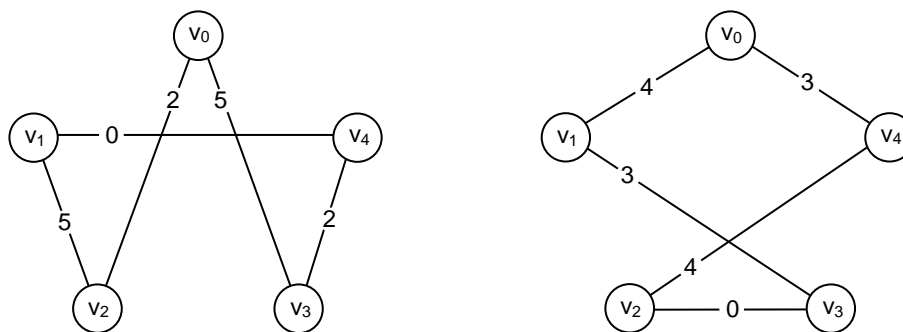
O próximo passo é encontrar para cada par de cores  $\{i, i'\}$ , com  $i \in \{1, 2\}$  os  $\frac{5-1}{2} = 2$  ciclos gerados pelo conjunto de arestas  $\{e \in E: c(e) = i \text{ ou } c(e) = i' \cup \{e_{ij}\}$ ,

onde  $e_{ij}$  representa a aresta  $\{v_i, v_j\}$ , e  $(i + i') \equiv 0 \pmod{5}$ :



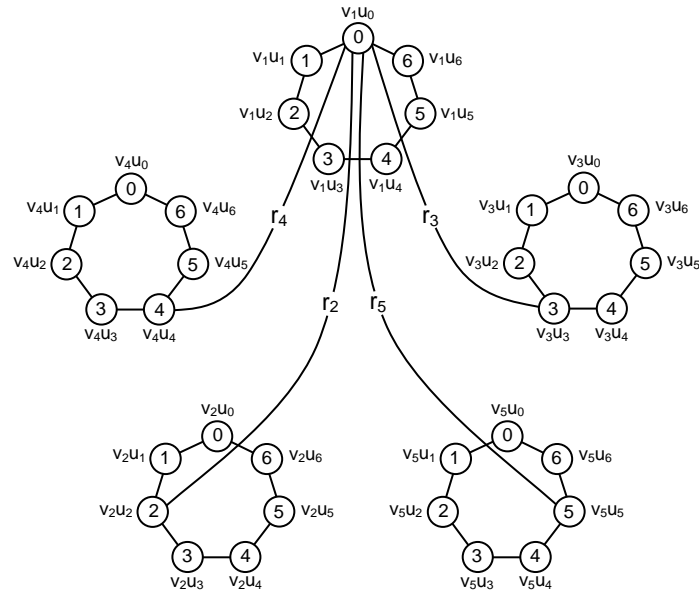
**Figura 4.6.** Ciclos gerados a partir dos conjuntos  $\{1, 4\}$  e  $\{2, 3\}$ .

Agora, para cada  $i = 2, 3, 4, 5$ , determinar o seu inverso  $i' = n + 2 - i = 7 - i$ , e para cada par de ciclos orientados atribuir aos seus arcos  $r_i$  num sentido e  $r_{i'}$  no outro:



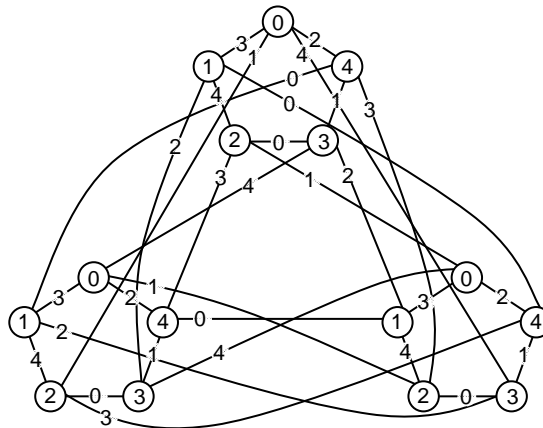
**Figura 4.7.** Ciclos gerados a partir dos conjuntos  $\{2, 5\}$  e  $\{3, 4\}$ .

Usando o raciocínio do Teorema 4.2, e novamente, por simetria, basta analisar um vértice de  $V^*$ , por exemplo,  $(v_1, u_0)$ :



**Figura 4.8.** Início do processo de coloração com folga 6 com 7 cores do grafo  $G^*$ .

A Figura 4.9 abaixo mostra coloração total equilibrada de um grafo 5-suporte gerado a partir de um  $K_3$ :



**Figura 4.9.** Coloração total equilibrada de um grafo 5-suporte gerado a partir de um  $K_3$ .

No teorema a seguir, será usado o produto cartesiano de grafos habitual, o que implica que a identidade foi utilizada sempre, razão pela qual as aplicações de ligação  $f_1$  e  $f_2$  foram omitidas ao longo da demonstração.



**Teorema 4.3.** Se  $G(V, E)$  é o complemento de um ciclo de ordem maior ou igual a 5, então  $G$  é um  $(|V|)$ -suporte.

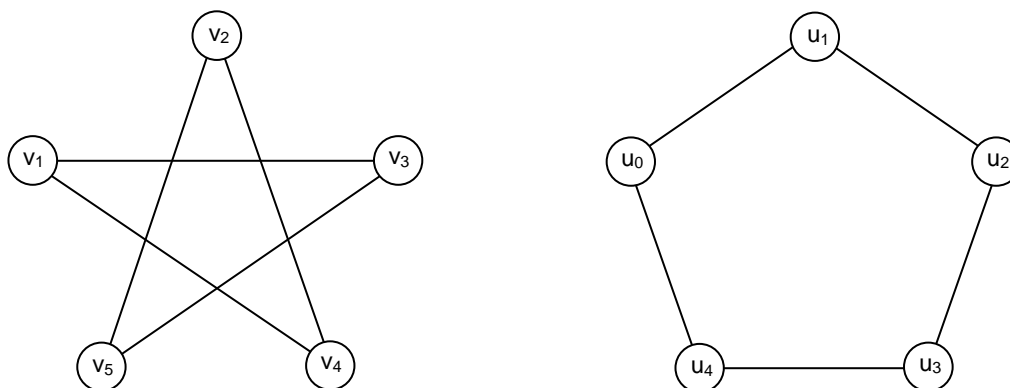
**Prova.** Considere um ciclo  $C_n^1$ , com  $n \geq 5$ , rotulado com os vértices  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , e um conjunto de cores  $C = \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Não há perda de generalidade em supor que os  $n$  vértices deste ciclo foram coloridos através da aplicação  $f_1 : V(C_n^1) \rightarrow C$ , onde  $f_1(v_i) = i-1$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

O próximo passo é construir  $n-1$  cópias  $C_n^2, \dots, C_n^n$  de  $C_n^1$ , e definir as colorações  $f_i : V(C_n^i) \rightarrow C$ , onde  $f_i(v_j) = k$ ,  $k = (j + (n-i)) \pmod{n}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ .

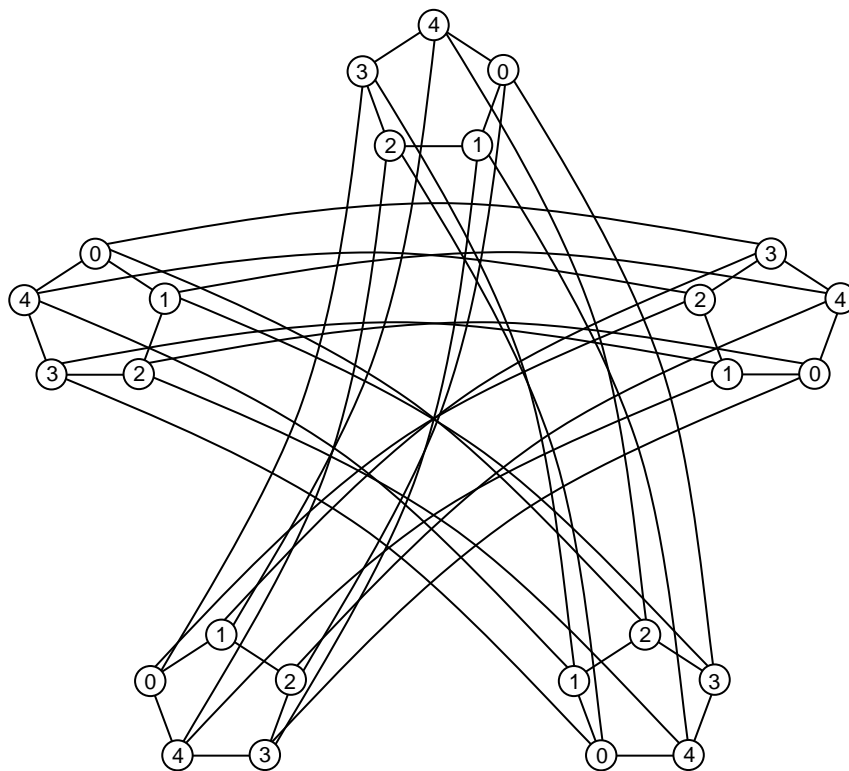
Observe que para cada vértice  $v_j$ , do ciclo  $C_n^i$ , as cores usadas para colorir os seus vizinhos no ciclo são as mesmas cores usadas para colorir suas cópias nos ciclos  $C_n^{(i+1) \pmod{n}}$  e  $C_n^{(i-1) \pmod{n}}$ , e que são exatamente os vértices adjacentes ao vértice  $v_j$  em  $C_n^i$ . As restantes  $n-3$  cópias de  $v_j$  foram coloridas, cada uma com uma cor distinta e diferente das cores associadas a  $v_j$  e seus vizinhos no ciclo  $C_n^i$ . Logo podemos adicionar uma aresta ligando  $v_j$  a cada uma das suas cópias situada nos ciclos diferentes de  $C_n^i$ ,  $C_n^{(i+1) \pmod{n}}$  e  $C_n^{(i-1) \pmod{n}}$ , e a coloração no grafo resultante continuará tendo folga  $\Delta$ .

Veja que originalmente o grafo era regular de grau 2, e como foram adicionadas  $n-3$  arestas a cada vértice, o grafo passou a ser regular de grau  $n-1$ , colorido com  $n$  cores e folga  $n-1$ .

As Figuras 4.10(A) e 4.10(B) abaixo mostram o grafo obtido a partir do complemento de um ciclo de ordem 5:

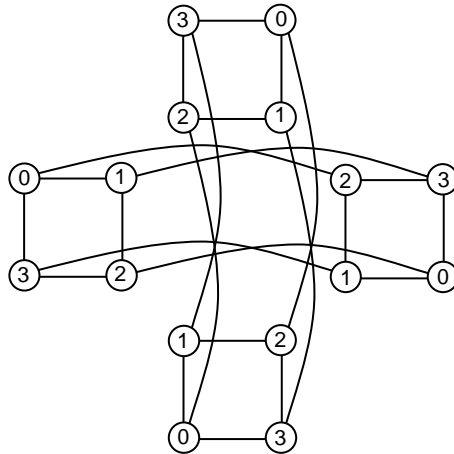


**Figura 4.10.** (A) Um complemento de um ciclo de ordem 5 e um ciclo de ordem 5



**Figura 4.10.**(B) Grafo obtido a partir do complemento de um ciclo de ordem 5.

Vale ressaltar que o Teorema 4.3 também é verdadeiro para o complemento de um ciclo de ordem 4, porém o grafo obtido é desconexo, conforme mostra a Figura 4.11:



**Figura 4.11.** Grafo desconexo obtido a partir do complemento de um ciclo de ordem 4.

**Teorema 4.4.** *Sejam  $G(V, E)$  um grafo regular e  $c: V \rightarrow C = \{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$  uma coloração com folga de ordem  $\Delta$ . Então:*

a)  $\Delta + 1$  divide  $|V|$ ;

b) Cada cor  $i \in C$ , é usada exatamente  $\frac{|V|}{\Delta + 1}$  vezes.

**Prova.** Para cada cor  $i \in C$ , denota-se por  $V_i$  o conjunto dos vértices que tem associada a cor  $i$  pela coloração  $c$ . Para dar continuidade, os seguintes fatos são necessários:

**Fato 1.** Para todo  $i \in C$ ,  $V_i$  é um conjunto independente de  $V$ . Como  $d(v) = \Delta$ , (lembramos que  $G$  é regular), todas as cores de  $C - \{c(v)\}$  são usadas em  $N(v)$ , isto é,  $V_i \cap N(v) = \emptyset$ .

**Fato 2.** Para todo  $i \in C$ , e dois vértices  $u, v \in V_i$ , tem-se que  $N(u) \cap N(v) = \emptyset$ . Isto é evidente, pois uma coloração com folga de ordem  $\Delta$  não pode ter nenhum vértice com dois vizinhos com a mesma cor associada.

Agora, dados  $i, j \in C$ , com  $i \neq j$ , e uma aplicação  $f: V_i \rightarrow V_j$ , construída da seguinte forma:  $f(u) = v$ , se e somente se  $v \in V_j \cap N(u)$ .

Pelos Fatos 1 e 2, a aplicação acima, além de bem definida, é uma bijeção, o que acarreta  $|V_i| = |V_j|$ . As afirmações a) e b) do Teorema 4.5 são consequências diretas deste resultado.

**Teorema 4.5.** (FRIEDMANN, MARKENZON, LOZANO e WAGA, 2011). *Sejam  $G(V, E)$  um grafo e  $c: V \rightarrow C = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq \Delta + 1$ , uma coloração com folga de ordem  $\Delta$  dos vértices de  $G$ . Então, existe uma coloração total de  $G$  com no máximo  $k + 1$  cores.*

**Prova.** Sejam  $H_k(V, E)$  o grafo completo de ordem  $k$ , e  $c': V \rightarrow C' = \{1, 2, \dots, k + 1\}$  uma coloração total de  $H_k$ . Para facilitar a escrita, os vértices de  $H_k$  serão identificados com a cor associada a ele por  $c$ , e novamente por comodidade, utilizou-se as cores 1, 2, 3, ...,  $k$ , para colorir os vértices de  $H_k$ . Define-se a aplicação  $f: V \rightarrow V$  como  $f(u) = i$  onde  $i$  é o vértice de  $H_k$ , tal que  $c(u) = c'(i)$ . Agora, para cada aresta  $uv \in E$ , define-se  $c(uv) = c'(f(u)f(v))$ . Observe que a coloração assim definida é própria, pois se duas arestas  $uv$  e  $uv'$  são incidentes em  $u$ , então  $c(v) \neq c(v')$ . Consequentemente  $f(v) \neq f(v')$  e como  $c'(f(u)f(v)) \neq c'(f(u)f(v'))$ , então  $c(uv) \neq c(uv')$ . Por outro lado, se uma aresta  $uv \in E$  é incidente no vértice  $v \in V$ , então  $c'(f(v)) \neq c'(f(u)f(v))$ , e daí  $c(u) \neq c(uv)$ .  $\square$

Relembrando, chama-se de **extensão natural de uma coloração com folga de ordem  $\Delta$** , a coloração obtida pela técnica utilizada na prova do Teorema 4.5.

**Teorema 4.6.** *Sejam  $G(V, E)$  um grafo regular, e  $c: V \rightarrow C = \{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$  uma coloração com folga de ordem  $\Delta$ . Então, a extensão natural de  $c$  a  $G$ , é uma coloração total equilibrada.*

**Prova.** Denota-se por  $c'$  a extensão de  $c$  em  $G$  e por  $C'$  o conjunto  $\{1, 2, \dots, \Delta + 2\}$ .

Para cada cor  $i \in C'$ ,  $E_i$  é o conjunto das arestas que tem associada a cor  $i$  pela coloração  $c'$ . A prova será dividida em dois casos:

**Caso 1.** A cor  $\Delta + 2$  não foi usada na coloração total, logo  $\Delta$  é par. Novamente, alguns fatos são necessários:

**Fato 3.** Dados  $i \in C$  e  $v \in V$ , com  $c(v) \neq i$ , existe  $e \in E_i$ , tal que  $v$  é um extremo de  $e$ . Como  $d(v) = \Delta$ , todas as cores  $C - \{c(v)\}$  são usadas nas arestas incidentes em  $v$ , mas  $c(v) \neq i$ , logo existe uma aresta incidente em  $v$  com a cor  $i$ .

**Fato 4.** Dado  $i \in C$ , sejam  $V' = V - V_i$ , e  $G'(V', E')$  o subgrafo de  $G$  induzido por  $V'$ , e  $c''$  a restrição de  $c'$  à  $G'$ , então  $E_i$  é um emparelhamento perfeito de  $G'$ . Lembre que um emparelhamento perfeito é aquele que cobre todos os vértices de  $G'$ . Que  $E_i$  é emparelhamento vem do fato da coloração ser própria, e que é perfeito vem do Fato 3.

Pelos Fatos 3 e 4, cada cor  $i \in C$  é usada exatamente  $\frac{|V - V_i|}{2}$  vezes nas arestas, o que prova que a coloração é equilibrada.

**Caso 2.** A cor  $\Delta + 2$  foi usada, logo  $\Delta$  é ímpar.

**Fato 5.** Para todo vértice  $v \in V$ , existe uma aresta  $e$  incidente em  $v$  com a cor  $\Delta + 2$ .

Para provar este fato, basta lembrar que para cada vértice  $u \in V$ ,  $d_G(u) = d_{H_{\Delta+1}}(f(u)) = \Delta$ , onde  $H_{\Delta+1}$  é o grafo completo de ordem  $\Delta + 1$ . Logo, o conjunto de cores usado para colorir as arestas incidentes em  $u$  no grafo  $G$ , é exatamente o mesmo conjunto usado para colorir as arestas incidentes em  $f(u)$  no grafo  $H_{\Delta+1}$ , e que a cor  $\Delta + 2$  aparece em alguma aresta incidente em  $f(u)$ . Com isso, a

cor  $\Delta + 2$  é usada  $\frac{|V|}{2}$  vezes, uma vez que  $|V|$  é par, pois  $G$  é regular de grau ímpar.

Por outro lado, cada cor  $i \in \{1, \dots, \Delta + 1\}$  é usada nas arestas de  $H_{\Delta+1}$  exatamente

$\frac{|V|-2}{2}$  vezes, isto é, ela somente não aparece no vértice com a cor  $i$  e em um outro

vértice qualquer. Denotando por  $g(i)$  a cor desse vértice, então uma cor  $i \in \{1, 2, \dots, \Delta$

$+ 1\}$ , aparece nas arestas de  $G$  exatamente  $k = \frac{|V| - (|V_i| + |V_{g(i)}|)}{2}$  vezes, mas

$|V_i| = |V_{g(i)}|$ , logo  $k = \frac{|V| - (2|V_i|)}{2}$ , e como  $|V_i| = \frac{|V|}{\Delta+1}$  segue que

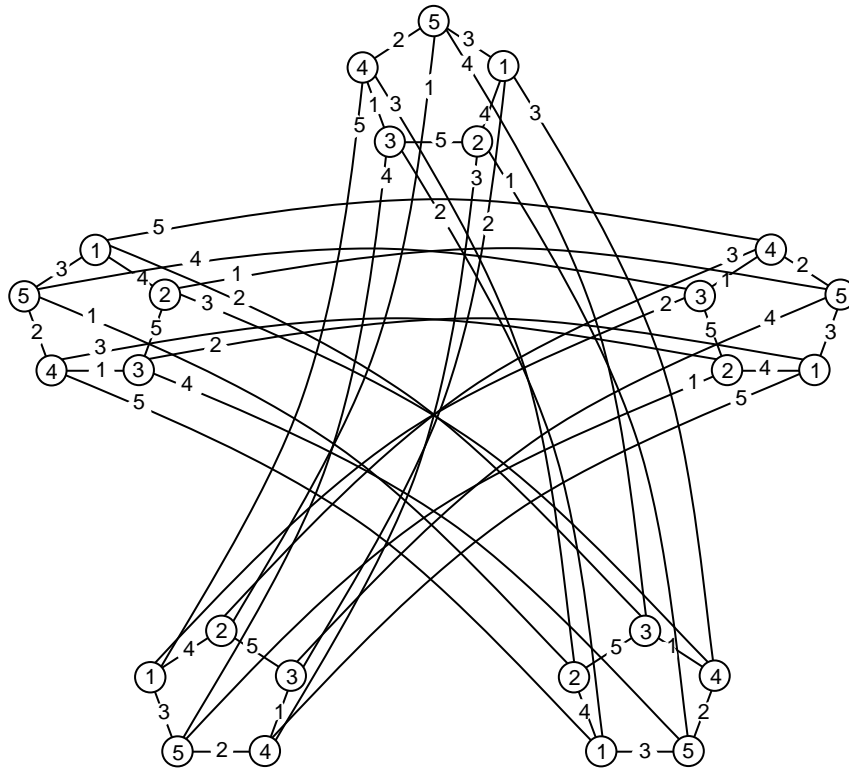
$|V| - 2|V_i| = |V| - 2\frac{|V|}{\Delta+1} = \frac{(\Delta-1)|V|}{\Delta+1}$ , de onde  $k = \frac{(\Delta-1)|V|}{2(\Delta+1)}$ , temos agora que na

coloração total a cor  $i$  aparece:

$\frac{|V|}{\Delta+1} + \frac{(\Delta-1)|V|}{2(\Delta+1)} = \frac{1}{\Delta+1} \left( |V| + \frac{(\Delta-1)|V|}{2} \right) = \frac{1}{\Delta+1} \frac{(\Delta+1)|V|}{2} = \frac{|V|}{2}$  vezes, logo a coloração

é equilibrada.

À família de grafos suporte que podem ser coloridos total e equilibradamente com no máximo  $\Delta + 2$  cores, pela forma, estrutura e geometria, sugere-se o nome de **Grafos Harmônicos**. A Figura 4.12 abaixo ilustra uma coloração total equilibrada de um grafo harmônico 4-regular construído a partir do complemento de um ciclo de ordem 5:



**Figura 4.12.** Coloração total equilibrada de um grafo harmônico 4-regular

O Teorema 4.7, enunciado e provado abaixo, mostra que é sempre possível gerar novos grafos harmônicos, a partir de grafos harmônicos já existentes.

**Teorema 4.7.** Se  $G(V, E)$  é um  $k$ -suporte então  $(f_1, G) \times (f_2, C_k)$  é um  $(k + 2)$ -suporte, onde  $f_1: E(D(G)) \rightarrow F(V(C_k))$  e  $f_2: E(D(C_k)) \rightarrow F(V)$  são as aplicações de ligação entre  $G$  e  $C_k$ .

**Prova.** Note que se  $G(V, E)$  é um  $k$ -suporte então  $(f_1, G) \times (f_2, C_k)$  pode ser colorido com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores. Pelos Teoremas 4.4, 4.5 e 4.6, existe uma coloração total equilibrada de  $(f_1, G) \times (f_2, C_k)$  com no máximo  $\Delta + 2$  cores e, conseqüentemente, existe uma coloração de arestas própria. Para concluir a prova, basta usar esta coloração de arestas para gerar as rotações  $r_i$  e  $r_j$ , juntamente com o raciocínio utilizado no Teorema 4.1.

É sempre possível aumentar o grau de qualquer grafo harmônico, preservando a coloração total equilibrada. Seja  $G(V, E)$  um grafo harmônico e  $c: V \rightarrow C$  uma coloração equilibrada de  $G$  com  $\Delta(G) + 1$  cores. Um grafo  $G'(V', E')$  será construído da seguinte forma:  $V' = V \cup \{u_{11}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{j1}, \dots, u_{jn}, \dots, u_{s1}, \dots, u_{sn}\}$ .

Seja  $E_i = \{e = \{x, y\} : x = u_{ji} \text{ e } (y = u_{ki} \text{ ou } y = v_{ii}); t, k \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, s\}, k \neq j\}$ ,

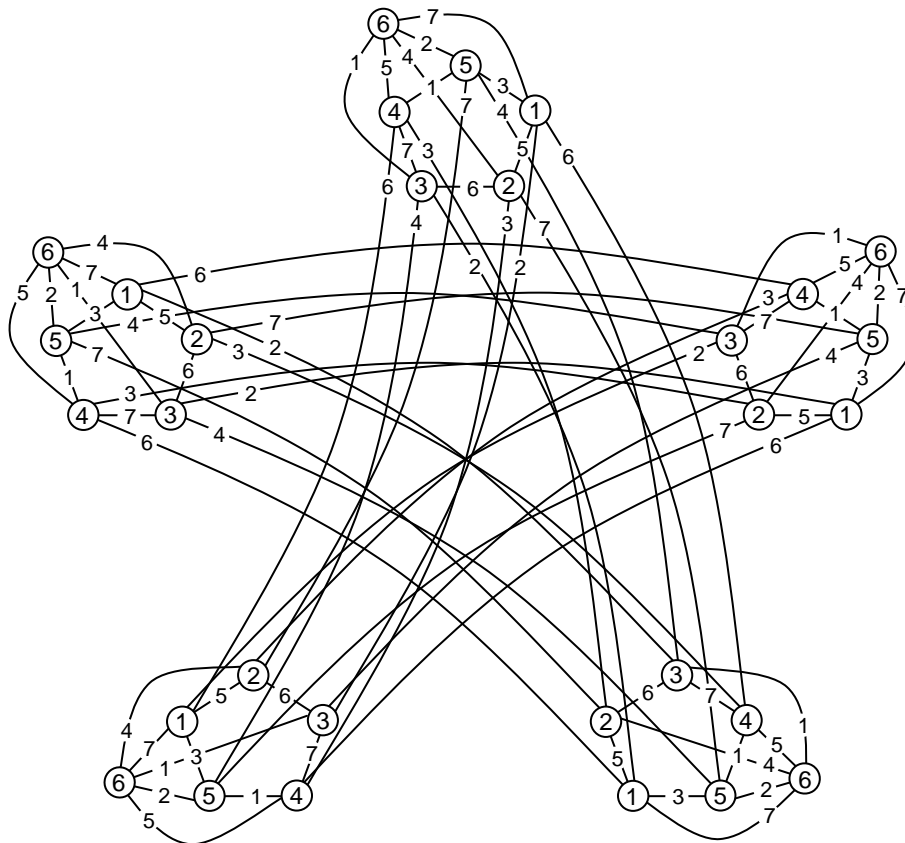
onde  $v_{1i}, \dots, v_{ni}$  são os vértices do ciclo  $C_n^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Seja  $E^* = \bigcup_{i=1}^n E_i$  e  $E' = E \cup E^*$ .

$G'$  pode ser colorido com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores. De fato,  $\Delta(G') = \Delta(G) + s$ , então

$c'(v) = \begin{cases} c(v) & \text{if } v \in V \\ c_{\Delta+1+j} & \text{if } v = u_{ji} \end{cases}$  é uma coloração equilibrada de  $G$  com  $\Delta(G') + 1$  cores. Para

obter a coloração total equilibrada, basta utilizar a técnica do Teorema 4.5.

A Figura 4.13 mostra a coloração total equilibrada de um grafo 5-regular obtido a partir de um grafo harmônico 4-regular.

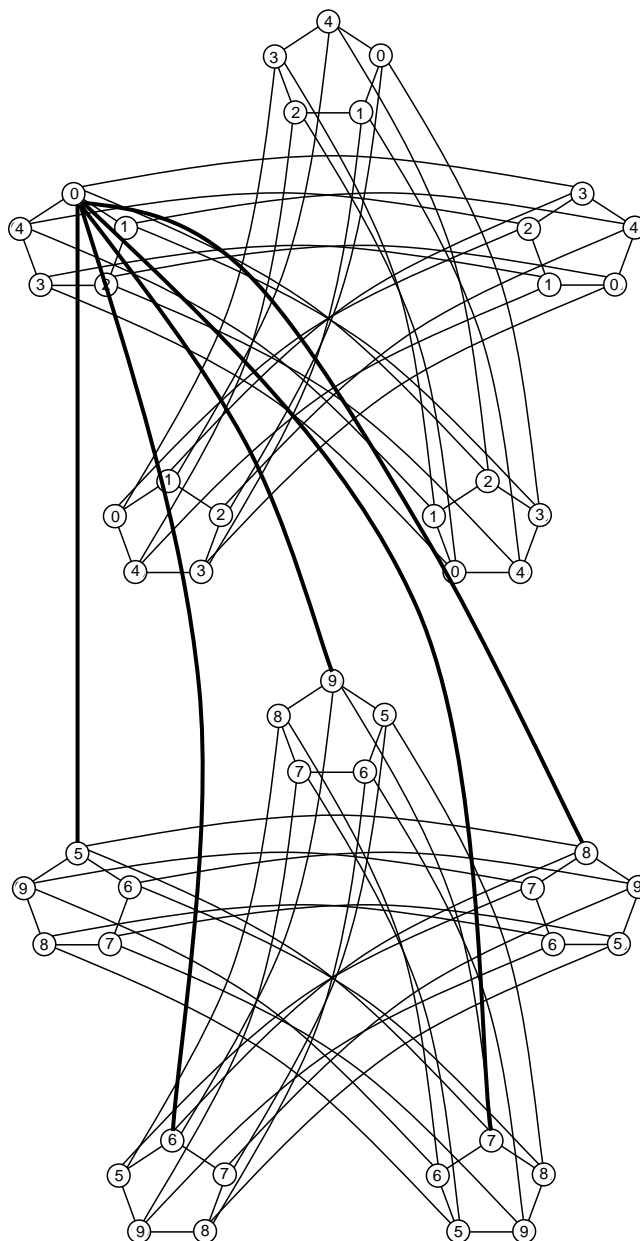


**Figure 4.13.** Coloração total equilibrada de um grafo 5-regular.



Outra ideia para gerar novos grafos regulares que podem se coloridos total e equilibradamente com no máximo  $\Delta + 1$  cores, é criar cópias de um grafo harmônico. O que irá diferir a cópia do grafo harmônico original são as cores usadas. Enquanto no grafo harmônico original as cores usadas são  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ , na sua cópia, que também é harmônica, as cores usadas são  $\{n, n+1, \dots, 2n-1\}$ . Note que agora é preciso conectar estes dois grafos, de modo que o grafo resultante seja  $(2n-1)$ -regular. Para realizar tal conexão, basta unir cada vértice do grafo original com seus correspondentes na sua cópia. Como cada vértice no grafo harmônico original tem grau  $n - 1$ , e existem  $n$  vértices correspondentes em sua cópia, ao uni-los, cada vértice do novo grafo terá grau  $2n - 1$ . Feito isso com todos os vértices, o novo grafo passará a ser regular de grau  $2n - 1$ , colorido em vértices com  $2n$  cores e folga  $2n - 1$ . Para obter a coloração total equilibrada, basta utilizar a técnica do Teorema 4.5.

A Figura 4.14 a seguir, ilustra o processo de conexão entre um vértice de um grafo harmônico e seus correspondentes na sua cópia:



**Figura 4.14.** Conexão entre um vértice de um grafo harmônico e seus correspondentes na sua cópia.

Repetindo o processo com todos os vértices, o grafo resultante será 9-regular, colorido com 10 cores e folga 9. Para finalizar, basta colori-lo equilibradamente usando a técnica do Teorema 4.5.

Neste capítulo mostrou-se que existe uma família suficientemente grande de grafos regulares que podem ser coloridos de forma total e equilibrada com  $\Delta + 2$  cores.

No próximo capítulo, como aplicação, sugere-se a utilização desta família como modelo de topologias de redes de interconexão do tipo ponto-a-ponto.

# Capítulo 5

## Coloração Total Equilibrada e Redes de Interconexão

### 5.1. Introdução

O processamento paralelo possibilita a divisão de uma mesma tarefa entre vários processadores, com a finalidade de se obter maior eficiência na sua execução e economia de tempo de processamento, ou seja, as máquinas são conectadas via rede para formar um “*único computador*”. Essa possibilidade de ganho de tempo é uma das razões pelas quais o estudo de algoritmos paralelos tem se expandido ao longo dos últimos anos.

Embora o processamento paralelo tenha vantagens significativas, apresenta como limitações o fato de a programação geralmente ser feita de forma sequencial e os algoritmos em paralelo serem específicos para cada topologia. Uma topologia de rede descreve como é o *layout* de uma rede de computadores através da qual há o tráfego de informações, e também como os dispositivos estão conectados a ela.

O ideal seria gerar algoritmos comuns a todas as topologias ou paralelizar automaticamente algoritmos sequenciais. LOZANO *et al.* (2008) apresentaram um algoritmo de troca completa de informações, baseado unicamente nas cores, independente da topologia. Com base neste trabalho, pretende-se neste capítulo, apresentar algumas topologias de rede descritas pelos autores, além de sugerir, sem testar, a utilização de outras topologias de rede.

Nos próximos itens, serão apresentadas algumas noções básicas a respeito de redes de interconexão, bem como as principais topologias de rede. Também será exposto um algoritmo de transmissão que explora a ideia de coloração total equilibrada. Posteriormente, será mostrado que é possível colorir de forma total e equilibrada as principais topologias de redes de interconexão do tipo ponto-a-ponto. Para isso, serão desenvolvidos métodos de coloração total equilibrada para os grafos específicos que representam as topologias mais comuns. É importante ressaltar que essas colorações não contrariam a conjectura de Vizing-Behzad para colorações não equilibradas.

## **5.2. Redes de Interconexão e Representação de Redes do tipo Ponto-a-Ponto**

Uma rede de interconexão é uma estrutura composta por um conjunto **P** de  $n > 1$  processadores e um conjunto **T** de ligações (conexões) entre os processadores e que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Cada processador tem sua memória local;
2. Cada processador pode executar, em determinado momento, uma e somente uma das seguintes tarefas:
  - a) processar alguma informação;

- b) enviar alguma informação;
- c) receber alguma informação.

3. Cada uma das tarefas gasta o mesmo tempo para sua realização.

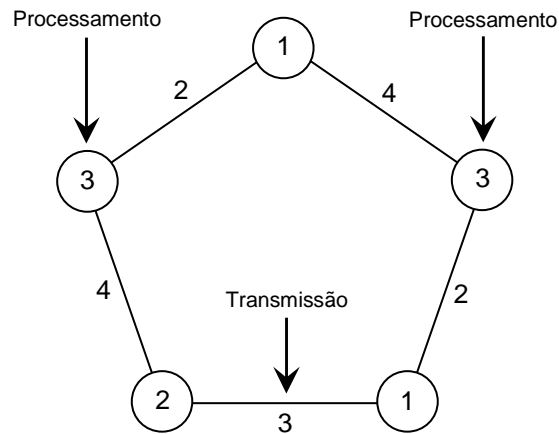
Em uma rede de interconexão, cada processador deve pertencer a alguma ligação, podendo estar em várias. Denomina-se canal, uma conexão que possui somente dois processadores.

Uma rede de interconexão pode ser representada por um grafo  $G(V, E)$ , neste caso, os vértices são os processadores e estão associados ao processamento de informações; as arestas são os canais e representam a transmissão de informações.

### **5.3. Coloração Total Equilibrada, Processamento e Transmissão de Dados**

Lembrando que uma coloração total é equilibrada se, para quaisquer cores  $c_1$  e  $c_2$  pertencentes ao conjunto de cores  $C$ , tem-se  $|a(c_1) - a(c_2)| \leq 1$ . A Figura 5.1 a seguir apresenta uma coloração equilibrada. A partir dessa coloração, pode-se associar que os processadores ou os canais coloridos com a mesma cor, por exemplo, com a cor 3, processam ou transmitem informações, simultaneamente.

Observa-se que a ideia de associar coloração total equilibrada ao processamento e transmissão de dados pode ajudar na elaboração de algoritmos que envolvam processamento e transmissão de dados, independentemente da topologia da rede. Em uma coloração total não equilibrada, embora exista a possibilidade desse tipo de associação, a falta de equilíbrio na distribuição das cores não permite um bom aproveitamento da rede.



**Figura 5.1.** Processamento e transmissão de informações utilizando coloração.

A seguir, apresenta-se um algoritmo que envolve unicamente transmissão de dados. Nesse caso, a ideia de coloração total equilibrada também é útil, pois as cores nos vértices indicam o sentido da transmissão.

## 5.4. Um Algoritmo de Comunicação com Base na Coloração Total Equilibrada

Considera-se que a medida de tempo de um algoritmo seja dada pelo número de passos que ele efetua. Em uma rede, admite-se que toda computação possa ser realizada instantaneamente por qualquer processador e que a comunicação entre processadores vizinhos deve consumir um passo de computação.

Abaixo, apresenta-se um algoritmo de comunicação, baseado em coloração total, que envolve troca completa de informações, ou seja, cada processador possui uma informação e é necessário que todos os processadores conheçam todas as informações.

Tipo: cor = inteiro;

Variáveis: k: inteiro {número de cores necessário para colorir

```

                                totalmente o grafo associado à topologia}
x[k]: array de cor;
aux: cor
início
    Passo 1:
        Criar uma coloração total equilibrada do grafo  $G(V, E)$ 
        que representa a topologia de rede
        para  $i := 1$  a  $k$  faça  $x[i] = i$ 
    Passo 2:
        para  $i := 1$  a  $k$  faça
            início
                Transmitir a informação por qualquer aresta com a
                Cor  $i$ , na direção do vértice cuja cor tem o maior
                índice no array de  $x$ .
            fim;
    Passo 3:
        aux := x[k];
        para  $i := k$  decrescendo até 1 faça  $x[i] := x[i - 1]$ ;
        x[1] := aux;
    Passo 4:
        Repetir os passos 2 e 3 até que todos os processadores
        recebam todas as informações.
Fim

```

Sejam  $x$  e  $y$  dois vértices adjacentes do grafo  $G(V, E)$ , associado a uma rede; o vértice  $y$  receberá a informação de  $x$  em no máximo  $k$  repetições dos passos 2 e 3 do algoritmo. Se  $d$  for o comprimento do maior caminho entre dois vértices quaisquer do grafo  $G$ , então, em  $dk^2$  passos, todos os vértices receberão todas as informações.

O algoritmo apresentado independe da topologia da rede de interconexão, mas funciona com qualquer coloração. Entretanto, uma coloração total equilibrada do grafo, que representa a rede, torna o processamento mais eficiente. A seguir, será mostrado



que as topologias mais utilizadas em redes de interconexão admitem colorações totais equilibradas que não contrariam a conjectura de Vizing.

## 5.5. Principais Topologias de Redes de Interconexão

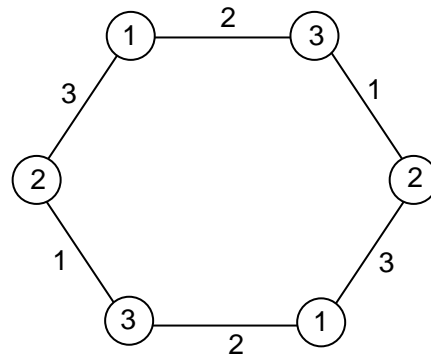
Abaixo, seguem as principais topologias de redes de interconexão, anel, estrela, árvore, hipercubo e toro. Em LOZANO (2005); LOZANO *et al.* (2008) e CHUNLING *et al.* (2009) pode-se encontrar as provas de que estas topologias admitem uma coloração total equilibrada com  $\Delta + 2$  cores, no máximo. Estes teoremas foram reproduzidos na íntegra, e podem ser consultados nos anexos B, C, D e E.

**Anel ou Ciclo.** Na topologia em anel, os dispositivos são conectados em série, formando um circuito fechado (anel). Os dados são transmitidos unidirecionalmente de vértice em vértice, até atingir o seu destino. Uma mensagem enviada por uma estação passa por outras estações, através das retransmissões, até ser retirada pela estação destino ou pela estação fonte.

**Teorema 5.1.** (LOZANO, FRIEDMANN e JURKIEWICZ, 2008). *Qualquer ciclo pode ser colorido de forma total e equilibrada com três ou quatro cores.*

**Prova.** Ver anexo B.

A seguir, na Figura 5.2, tem-se o exemplo de uma topologia em anel, colorida total e equilibradamente:



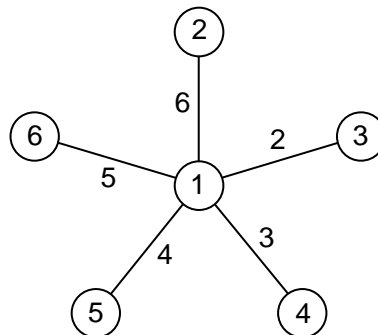
**Figura 5.2.** Uma topologia em anel e sua coloração total equilibrada.

**Estrela.** A mais comum atualmente, a topologia em estrela utiliza cabos de par trançado e um concentrador como ponto central da rede. O concentrador se encarrega de retransmitir todos os dados para todas as estações, mas com a vantagem de tornar mais fácil a localização dos problemas, já que, se um dos cabos, uma das portas do concentrador ou uma das placas de rede estiver com problemas, apenas o nó ligado ao componente defeituoso ficará fora da rede.

**Teorema 5.2.** (LOZANO, 2005). *Se  $G(V, E)$  é o grafo estrela com  $n$  vértices, então existe uma coloração total equilibrada de  $G$  com  $(\Delta+1)$  cores.*

**Prova.** Ver Anexo C.

Na Figura 5.3 abaixo, tem-se o exemplo de uma topologia em estrela, colorida total e equilibradamente com  $\Delta + 1$  cores:



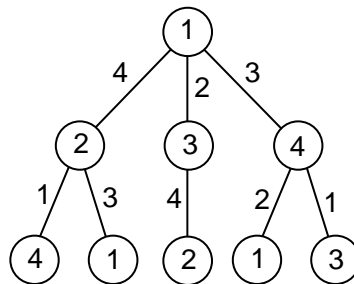
**Figura 5.3.** Uma topologia em estrela e sua coloração total equilibrada.

**Árvore.** A topologia em árvore é essencialmente uma série de barras interconectadas. É equivalente a várias redes estrelas interligadas entre si através de seus vértices centrais.

**Teorema 5.3.** (LOZANO, 2005). *Para toda árvore  $T(V, E)$ , com  $|V| \geq 3$ , se fixarmos uma folha  $t \in V$ , existe uma coloração total equilibrada com as cores do conjunto  $C = \{1, 2, 3, \dots, \Delta + 1\}$ , na qual a  $c(t) \in C_+$ .*

**Prova.** Ver anexo D.

A Figura 5.4 ilustra uma topologia em árvore, colorida total e equilibradamente com  $\Delta + 1$  cores:



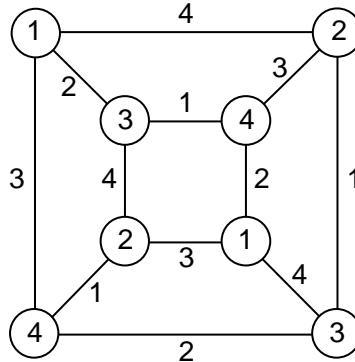
**Figura 5.4.** Uma topologia em árvore e sua coloração total equilibrada.

**Hipercubo.** É uma topologia de rede que possui pequeno diâmetro e, portanto, conveniente para aplicações com pouca localidade de dados. Além disso, todos os vértices podem ser identificados por uma numeração binária, possui escalabilidade restrita a potências de 2 e o diâmetro cresce logaritmicamente.

**Teorema 5.4.** (LOZANO, FRIEDMANN e JURKIEWICZ, 2008). *Qualquer hipercubo  $Q_k$  pode ser colorido de forma total e equilibrada com  $\Delta + 2$  cores, ou seja, com  $k + 2$  cores.*

**Prova.** Ver anexo D.

A Figura 5.5 mostra uma topologia em hipercubo, colorida total e equilibradamente com quatro cores:

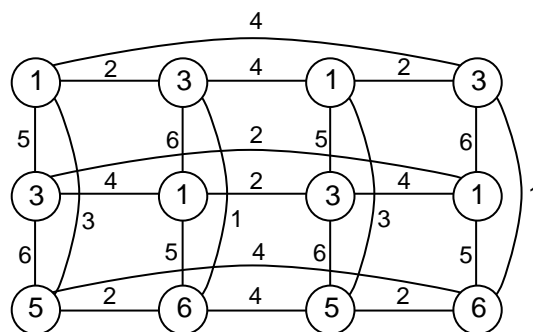


**Figura 5.5.** Uma topologia em hipercubo e sua coloração total equilibrada.

**Toro.** Esta topologia trata de vários anéis de processadores, sobrepostos e distribuídos tanto na horizontal como na vertical. Cada processador encontra-se ligado a outros, formando uma malha em que os extremos estão ligados entre si.

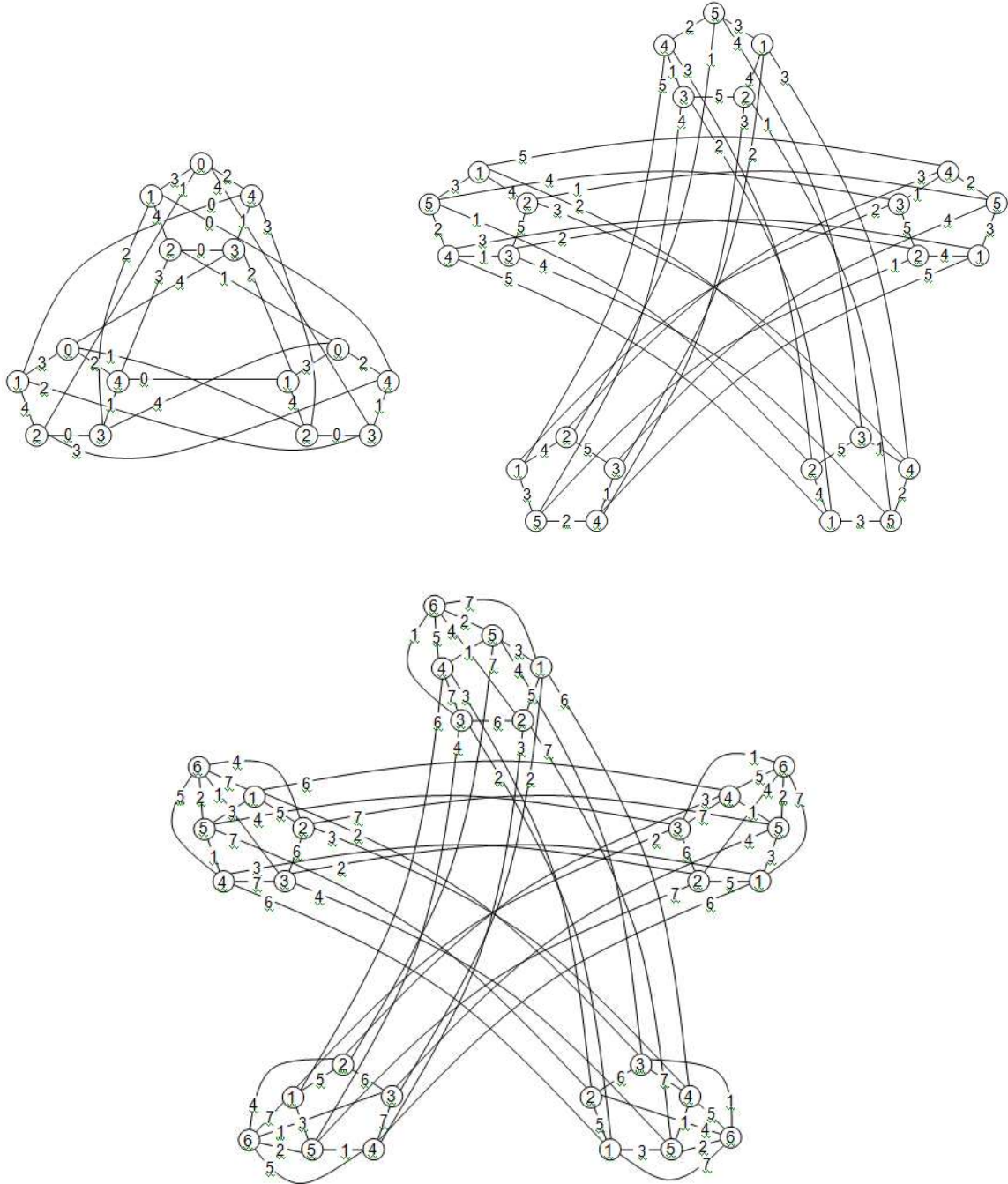
**Teorema 5.4.** (LOZANO, FRIEDMANN e JURKIEWICZ, 2008). *Qualquer toro pode ser colorido de forma total e equilibrada com 6 cores no máximo.*

**Prova.** Ver anexo E.



**Figura 5.6.** Uma topologia em toro e sua coloração total equilibrada

Como contribuição para este capítulo, sugere-se o uso de topologias que tomam com base os grafos harmônicos, objeto de estudo deste trabalho. Abaixo, na Figura 5.7, ilustramos algumas destas topologias:



**Figura 5.7.** Sugestões de topologias de rede baseadas em grafos harmônicos.

# Capítulo 6

## Considerações Finais

Este capítulo apresenta os resultados obtidos neste trabalho e as propostas para estudos futuros.

### 6.1. Conclusões

Algumas definições foram fundamentais para que os teoremas pudessem ser enunciados de maneira clara. Entre essas definições, citamos o produto funcional de digrafos, o produto funcional de grafos e de digrafos, a ligação funcional de grafos e digrafos, a rotação em um conjunto finito e o grafo suporte.

De posse desses conceitos, provou-se que a partir dos grafos suporte é possível gerar uma subfamília de grafos regulares, que podem ser coloridos de forma total e equilibrada com  $\Delta + 2$  cores no máximo. Esses grafos receberam o nome de Harmônicos, devido à geometria e à forma.

Em seguida, para garantir a relevância destes resultados, foi necessário mostrar que essa família é suficientemente grande, isto é, que pode ser estendida preservando a coloração total equilibrada. Descreveu-se três maneiras de ampliar estes grafos, mantendo-se as propriedades.

Para finalizar, apresentou-se um algoritmo de transmissão de dados que explora a ideia de coloração total equilibrada para a troca completa de informações em redes de interconexão do tipo ponto-a-ponto. Estudou-se as principais topologias de redes que admitem uma coloração total equilibrada, e como contribuição sugeriu-se a utilização dos grafos harmônicos como modelo de transmissão para essas topologias.

## 6.2. Trabalhos Futuros

Para dar continuidade ao trabalho desenvolvido nesta tese, sugere-se, para o futuro, as seguintes linhas de pesquisa:

- Estudar a conexidade, bem como outras propriedades, de grafos resultantes de produtos funcionais;
- Estudar a coloração total equilibrada em grafos não regulares que são gerados a partir do produto funcional de outros grafos;
- Estudar a coloração total equilibrada em grafos  $k$ -caminho, uma das primeiras ideias do início dessa caminhada.

## Anexo A

### Coloração com Folga de Ordem 2 com $\Delta + 2$

#### Cores

**Teorema A.1.** (LOZANO, FRIEDMANN, WAGA E MARKENZON, 2009). *Para todo grafo  $G \neq C_5$ , onde  $C_5$  é o ciclo com 5 vértices, existe uma coloração com folga de ordem 2 com  $\Delta + 2$  cores, isto é,  $\chi_f^2(G) \leq \Delta + 2$ .*

**Prova.** Seja o conjunto de cores  $C = \{1, \dots, \Delta + 2\}$ .

Vamos supor inicialmente que  $G$  é um ciclo  $(v_0, \dots, v_{n-1}, v_0)$  com  $n \neq 5$  vértices, e que  $t$  seja o maior múltiplo de 3 menor ou igual a  $n$ . Seja a coloração  $c: V \rightarrow C$  tal que:

$$n \bmod 3 = 0 \rightarrow c(v_i) = (i \bmod 3) + 1, i = 0, \dots, n-1$$

$$n \bmod 3 = 1 \rightarrow \begin{cases} c(v_i) = (i \bmod 3) + 1 & i = 0, \dots, t-1 \\ c(v_{n-1}) = 4 \end{cases}$$



$$n \bmod 3 = 2 \left\{ \begin{array}{l} c(v_i) = (i \bmod 3) + 1, \quad i = 0, \dots, t-3 \\ c(v_{t-2}) = 4 \\ c(v_{t-1}) = 3 \\ c(v_t) = 2 \\ c(v_{n-1}) = 4. \end{array} \right.$$

A construção é análoga para caminhos e para o caso de grafos em que todas as componentes conexas são ciclos ou caminhos.

Vamos supor que  $G$  não é um ciclo nem um caminho. Assim,  $\Delta(G) \geq 3$ . Se todos os vértices pertencem a pelo menos um triângulo  $K_3$ , então qualquer coloração própria é uma coloração com folga de ordem 2, limitada em  $\Delta + 1$  cores, pelo Teorema de Brooks. Desta forma, tratamos de grafos em que existe pelo menos um vértice que não pertence a nenhum triângulo. Demonstraremos usando o segundo princípio de indução na ordem do grafo.

Se  $G$  possui 4 ou 5 vértices, basta usar uma cor diferente para cada vértice.

Suponhamos verdadeiro o enunciado para grafos com até  $n-1$  vértices.

Caso 1:  $G$  possui pelo menos um vértice  $v \in V$  de grau 1.

Seja  $u \in V$  adjacente ao vértice  $v$  e  $w \in N(u), w \neq v$ . Retiramos  $v$  do grafo  $G$ , obtendo o grafo  $G' = (V', E')$ . Existe uma coloração  $c': V' \rightarrow C$  com folga de ordem 2 para  $G'$ . Adicionando  $v$  a  $G'$  com a respectiva aresta, obtemos novamente  $G$ . A coloração  $c: V \rightarrow C$  é com folga de ordem 2, tal que:

$$c(x) = c'(x), \text{ se } x \neq v \text{ e}$$

$$c(v) \in C - \{c'(u), c'(w)\}$$

Caso 2:  $G$  possui dois vértices adjacentes  $v, u \in V$  ambos de grau 2.

Seja o caminho  $P = (v_1, \dots, v_p)$  tal que:

- a)  $v, u \in P$ ,
- b)  $d(v_i) = 2, i = 1, \dots, p$  e
- c)  $P$  é um caminho maximal em relação aos itens anteriores.

Sejam  $u_1$  vizinho de  $v_1$  que não pertence a  $P$  e  $u_p$  o vizinho de  $v_p$  que não pertence a  $P$ .

Subcaso 2.1:  $u_1 \neq u_p$

Retiramos  $P$  de  $G$ , consideramos o grafo  $G' = (V', E')$  obtido. Por hipótese de indução, existe uma coloração  $c': V' \rightarrow C$  com folga de ordem 2 para o grafo  $G'$ . Incluímos, novamente, o caminho  $P$  em  $G'$ . Como  $P$  é maximal,  $u_1$  e  $u_p$  têm grau maior ou igual a 2 em  $G'$ . Assim,

$|c(N(u_1))| \geq 2$  e  $|c(N(u_p))| \geq 2$ . Podemos então definir a coloração

$c: V \rightarrow C$  para tal que:

Caso  $p = 2$ :

$$\begin{aligned} c(x) &= c'(x), x \in V' \\ c(v_1) &\in C - \{c(u_1), c(u_2)\} \\ c(v_2) &\in C - \{c(u_1), c(v_1), c(u_2)\} \end{aligned}$$

Caso  $p = 3$ :

$$\begin{aligned} c(x) &= c'(x), x \in V' \\ c(v_1) &\in C - \{c(u_1)\} \\ c(v_2) &\in C - \{c(u_1), c(v_1), c(u_3)\} \\ c(v_3) &\in C - \{c(v_1), c(v_2), c(u_3)\} \end{aligned}$$

Caso  $p = 4$ :

$$\begin{aligned}
c(x) &= c'(x), \quad x \in V' \\
c(v_1) &\in C - \{c(u_1)\} \\
c(v_2) &\in C - \{c(u_1), c(v_1)\} \\
c(v_3) &\in C - \{c(v_1), c(v_2), c(u_4)\} \\
c(v_4) &\in C - \{c(v_2), c(v_3), c(u_4)\}
\end{aligned}$$

Caso  $p \geq 5$ :

$$\begin{aligned}
c(x) &= c'(x), \quad x \in V' \\
c(v_1) &\in C - \{c(u_1)\} \\
c(v_2) &\in C - \{c(u_1), c(v_1)\} \\
c(v_i) &\in C - \{c(v_{i-1}), c(v_{i-2}), c(u_4)\} \text{ para } i = 3, \dots, p-2 \\
c(v_{p-1}) &\in C - \{c(v_{p-3}), c(v_{p-2}), c(u_p)\} \\
c(v_p) &\in C - \{c(v_{p-2}), c(v_{p-1}), c(u_p)\}
\end{aligned}$$

Por construção, a coloração tem folga de ordem 2.

Subcaso 2.2:

Assim, temos um ciclo. Se não for o  $u_1 = u_p$ , basta usarmos a coloração descrita no início da demonstração. Se for o  $C_5$ , como  $\Delta(G) \geq 3$ ,  $|C| \geq 5$  e podemos usar uma cor para cada vértice.

Caso 3: Não existem em  $G$  dois vértices de grau 2 adjacentes entre si, mas existe pelo menos um vértice  $v \in V$  de grau 2.

Sejam  $u \in N(v)$  e  $v_1, \dots, v_p$  todos os vértices com grau 2 adjacentes ao  $u$  incluindo  $v$ .

Retiramos de  $G$  o conjunto de vértices  $U = \{u, v_1, \dots, v_p\}$  e obtemos o grafo  $G' = (V', E')$ .

Por hipótese de indução, existe uma coloração com folga de ordem 2  $c': V' \rightarrow C$ .

Adicionamos o conjunto  $U$  com as respectivas arestas ao grafo  $G'$  e podemos definir em  $G$  uma coloração  $c: V \rightarrow C$  com folga de ordem 2 tal que:

$$c(x) = c'(x), \text{ se } x \notin U \text{ e}$$

$$c(u) \in C - c'(N(U)).$$

Observe que,  $|N(U)| \leq d(u) \leq \Delta$ . Sobram  $\Delta$  cores para colorir cada vértice  $v_1, \dots, v_p$  com cores diferentes.

Caso 4: Não existem vértices de grau 2 no grafo  $G$ .

Devemos escolher dois vértices  $v, u \in V$  adjacentes que não possuam vizinhos em comum. Lembramos que  $G$ , obtendo o grafo  $G' = (V', E')$ . Existe uma coloração  $c': V' \rightarrow C$  com folga de ordem 2. Adicionamos os vértices  $v$  e  $u$ , e retornamos ao grafo  $G$ . Consideremos a coloração  $c: V \rightarrow C$ , sabendo-se que  $u' \in N(u)$  e  $v' \in N(v)$ :

$$c(x) = c'(x), x \notin \{v, u\}$$

$$c(u) \in C - c(N(u) \cup \{v'\})$$

$$c(v) \in C - c(N(v) \cup \{u'\})$$

Esta coloração é com folga de ordem 2 e sempre possível, pois

$$|N(u)| = d(u) \leq \Delta \text{ e } |N(v)| = d(v) \leq \Delta.$$

## Anexo B

### Coloração Total Equilibrada em Ciclos

**Teorema B.1.** (LOZANO, FRIEDMANN e JURKIEWICZ, 2008). *Qualquer ciclo pode ser colorido de forma total e equilibrada com três ou quatro cores.*

**Prova. 1° caso (k múltiplo de 3).** Seja  $C = \{c_1, c_2, c_3\}$  um conjunto de cores. Considere a sequência de elementos do anel  $C_k$  dada por:  $v_1e_1v_2, v_2e_2v_3, \dots, v_{k-1}e_{k-1}v_k, v_ke_kv_1$ , sendo a aresta  $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$  quando  $1 \leq i \leq k-1$  e  $e_i = \{v_k, v_1\}$  se  $i = k$ . Colore-se a sequência acima com as cores  $c_1, c_2, c_3$  nessa ordem e sucessivamente até completar o ciclo. Observa-se que a cor da aresta  $e_k$  será  $c_3$ ; diferente das cores do vértice  $v_1$  e da aresta  $e_1$  que são coloridos respectivamente por  $c_1$  e  $c_2$ . Cada uma das três cores é utilizada  $\frac{2k}{3}$  vezes e a coloração é equilibrada.

**2° caso (k não múltiplo de 3).** Se  $k$  não é múltiplo de 3, não há coloração total com 3 cores. De fato, cada classe de cor teria  $\frac{2k}{3} + 1$  elementos, o que se constata facilmente ser impossível. Em seguida, apresentamos uma coloração com 4 cores  $c_1, c_2, c_3, c_4$ . Se  $k$  é par, a sequência de elementos do ciclo dada por:  $v_1e_1v_2, v_2e_2v_3, \dots, v_k$

$v_1 e_{k-1} v_k, v_k e_k$  será colorida sucessivamente pelas cores  $c_1, c_2, c_3, c_4$  nessa ordem até completar o anel. A aresta  $e_k$  terá cor  $c_4$ , diferente da cor do vértice  $v_1$  (cor  $c_1$ ) e da aresta  $e_1$  (cor  $c_2$ ). Cada cor aparecerá  $\frac{k}{2}$  vezes, e a coloração é equilibrada. Se  $k$  for ímpar, colore-se a sequência de elementos do ciclo com as cores  $c_1, c_2, c_3, c_4$  nessa ordem até a aresta  $e_{k-1}$  inclusive. Observa-se que até  $e_{k-1}$  a coloração é equilibrada. A fim de evitar conflito de cores no restante da coloração, o vértice  $v_k$  é colorido com  $c_2$  e a aresta  $e_k$  com a cor  $c_3$ . As cores  $c_1$  e  $c_4$  são usadas  $\frac{k-1}{2}$  vezes cada uma e as cores  $c_2$  e  $c_3$  são utilizadas  $\frac{k+1}{2}$  vezes.

## Anexo C

### Coloração Total Equilibrada em Árvores

**Teorema C.1.** (LOZANO, 2005). *Se  $G(V, E)$  é o grafo estrela com  $n$  vértices então, existe uma coloração total equilibrada de  $G$  com  $\Delta + 1$  cores.*

**Prova.** Seja  $v_1$  o vértice com grau  $n-1$ , e os restantes vértices serão rotulados com  $v_2, \dots, v_n$ . Colorimos os vértices usando todas as cores  $\{1, \dots, n\}$  em qualquer ordem, seja  $\alpha_i$  a cor dada ao vértice  $v_i$ , agora colorimos: a aresta  $v_1v_2$  com a cor  $\alpha_n$ ,  $v_1v_3$  com a cor  $\alpha_{n-1}$ , ...,  $v_1v_n$ . Se  $n$  for ímpar a coloração acima é própria senão seja  $k=n/2$ , então troque as cores das arestas  $v_1v_k$  e  $v_1v_{k+1}$  obtendo assim a coloração desejada. Observe que todas as cores foram usadas 2 vezes, exceto a cor  $\alpha_1$  que foi usada uma vez.

**Teorema C.2.** (LOZANO, 2005). *Para toda árvore  $T(V, E)$ , com  $|V| \geq 3$ , se fixarmos uma folha  $t \in V$ , existe uma coloração total equilibrada com as cores do conjunto  $C = \{1, 2, 3, \dots, \Delta + 1\}$ , na qual a  $c(t) \in C_+$ .*

**Prova.** Seja  $t$  a folha fixada. Se  $\Delta=2$  então  $T$  é um caminho e a prova é evidente, logo vamos supor  $\Delta \geq 3$ .

Faremos a prova por indução em  $|V|$ . Se  $|V|=4$ , então  $T$  é o grafo estrela, lembre que  $\Delta \geq 3$ , e fica provado pelo Teorema A.2, observe que na coloração assim obtida todas as folhas pertencem a  $C_+$ . Suponhamos agora que o teorema é verdadeiro para toda árvore  $T(V, E)$  tal que  $4 \leq |V| \leq n-1$ . Provemos que é verdadeiro para  $T(V, E)$  com  $|V|=n$ .

Seja  $v$  o vértice de maior grau dentre todos os vértices de  $S_T$ . Vamos diferenciar dois casos:

Caso 1:  $|F_T(v)| \geq 2$ . Retiremos de  $T$  o conjunto de vértices  $F_T(v)$ . Seja  $T(V, E)$  a nova árvore obtida. Como  $v$  é uma folha em  $T$  então existe uma coloração total equilibrada  $c$  de  $T$  com as cores do conjunto  $C=\{1,2,3,\dots,\Delta+1\}$  tal que  $c(v) \in C_+$ . Se  $t \notin F_T(v)$ , seja  $\alpha=c(t)$ . Para fixar idéias e sem perder generalidade, sejam  $u$  o vértice adjacente a  $v$  em  $T$ ,  $c(v)=1$ ,  $c(uv)=2$ ,  $c(u)=3$ ,  $F(v)=\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  e  $A(v)=\{e_i \mid e_i = v_i v, i=1 \dots p\}$ . Denotemos por  $q$  o número de vezes que uma cor de  $C_+$  foi utilizada. Novamente vamos diferenciar 3 casos:

1.1)  $|C| \geq 2p$ . Neste caso podemos colorir todos os elementos de  $E(v) \cup A(v)$  com as cores de  $C$ , observe que  $v \in C_+$  e a cor 2 pode ser usada num vértice. Se  $\alpha \in C$  então tem que ser usada.

1.2.1.1)  $p \leq |C| < 2p$ . Se  $2 \in C$  e  $\alpha \neq 1$ . Colorir todas as arestas de  $A(v)$  com as cores de  $C - \{2\}$  completando com uma cor  $\beta \in C_+ - \{1\}$  (se  $\alpha \in C_+$  completar com  $\alpha$ ). Se for necessário, os vértices de  $F(v)$  serão coloridos com as cores de  $C$ , usando técnica semelhante à usada por LOZANO (2005); se  $\alpha \in C$  usar  $\alpha$  num ou dois vértices de forma a ser usada  $q+1$  vezes.



1.2.1.2) Se  $\alpha \neq 1$  basta substituir 1 por alguma de  $\beta \in C$ ,  $\beta \notin \{2,3\}$ , fazer  $C_+ = (C \cup \{1\}) - \{\beta\}$  e proceder como acima. Se isto não for possível (neste caso  $F(v) \leq 2$ ), substituir 1 pela cor 4, colorir  $e_1$  e  $v_2$  com a cor 1,  $v_1$  com a cor 2 e  $e_2$  com a cor 3.

1.2.2.1) Se  $2 \in C_+$  e  $\alpha \neq 1$ , então podemos colorir todos elementos de  $E(v) \cup A(v)$  com cores de  $C$ , Se  $\alpha \in C_+$  substituir uma cor repetida de  $C$  por  $\alpha$ , num vértice, senão usar  $\alpha$  duas vezes.

1.2.2.2) Se  $\alpha = 1$ , então proceder como em 1.2.1.2.

1.3)  $|C| < p$ .

1.3.1)  $C_+ = \{1,2,3,\alpha\}$ ,  $\alpha \notin \{1,2,3\}$ , neste caso temos  $|C_+| = \Delta + 1 - 4 = \Delta - 3$  daí  $p = |F(v)| \geq 2$ . Se  $F(v) = 2$  então colorir  $e_2$  e  $v_1$  com a única cor de  $C$ , colorir  $e_1$  com  $\alpha$ , e  $v_2$  com 2. Se  $|F(v)| = \Delta - 2$  então colorir  $e_p$  com  $\alpha$ ,  $v_p$  com 2 e os restantes elementos de  $E(v) \cup A(v)$  podem ser coloridos com cores de  $C$  usando cada cor duas vezes. Se  $|F(v)| = \Delta - 1$ , substituir 1 por  $\alpha$  em  $v$ , colorir  $v_p$  e  $e_{p-1}$  com a cor 1,  $e_p$  com a cor 3 e  $v_{p-1}$  com a cor 2. Os restantes elementos de  $E(v) \cup A(v)$  podem ser coloridos usando as cores de  $C$  duas vezes.

1.3.2)  $C_+ = \{1,2,3\}$  e  $\alpha \in \{2,3\}$ , neste caso  $|C_+| = \Delta - 2$  logo  $|F(v)| = \Delta - 1$ . Colorir  $e_p$  com a cor 3 e  $v_{p-1}$  com a cor 2. Os restantes elementos de  $E(v) \cup A(v)$  podem ser coloridos usando duas vezes as cores de  $C$ .

1.3.3)  $C_+ = \{1,2,3\}$ ,  $\alpha \neq 1$ , neste caso  $|F(v)| = \Delta - 1$ ,  $|C_+| = \Delta - 2$ . Substituir 1 por uma cor  $\beta \in C$  em  $v$ . Colorir  $e_{p-1}$  e  $v_p$  com a cor 1 colorir os restantes elementos de  $E(v) \cup A(v)$  usando as cores de  $C \cup \{2,3\}$ , usando primeiro as cores de  $C$  duas vezes.

1.3.4)  $C_+ \subset \{1,2,3,\alpha\}$ ,  $|C_+| = 3$ ,  $\alpha \notin \{1,2,3\}$ ,  $\alpha \in C_+$ .

Neste caso  $|F(v)| = \Delta - 1$ ,  $|C_+| = \Delta - 2$ , substituir 1 por  $\alpha$  em  $v$  colorir  $v_p$  e  $e_{p-1}$  com a cor 1 e colorir as restantes arestas com cores de  $C$  (se  $2 \in C$ , completar com a cor 3 a

aresta que falta). Colorir os vértices restantes de  $F(v)$  com as cores de  $C$ ; usando técnica semelhante à LOZANO (2005) (a cor 2 agora poderá ser usada).

1.3.5) Existe uma cor  $\beta \notin \{1, 2, 3, \alpha\}$ ,  $\beta \in C_+$ . Substituir 1 por  $\beta$  em  $v$ , colorir  $e_2$  e  $v_1$  com a cor 1. Colorir os restantes vértices e arestas do modo que segue:

Se  $|F(v)|=2$ , e  $C \neq \emptyset$ , colorir  $v_2$  com a única cor de  $C$ , senão colorir  $v_2$  com a cor 2.

Se  $\alpha \notin \{2, 3\}$ , colorir  $e_1$  com  $\alpha$ , senão colorir  $e_1$  com a cor 3.

Se  $|F(v)| > 2$ . Se  $2 \in C$ . Colorir todas as arestas possíveis de  $A(v)$ , usando duas de  $C - \{2\}$ ; completar a coloração das arestas usando cores de  $C_+ - \{2, \beta\}$ ; colorir os vértices possíveis de  $F(v) - \{v_1\}$  com as cores de  $C$ . Se ainda faltarem vértices por serem coloridos, então todas as cores foram usadas  $q+1$  vezes; completar os restantes vértices tomando cuidado de usar a cor  $\alpha$  em um deles, eventualmente teremos que trocar a cor de duas arestas.

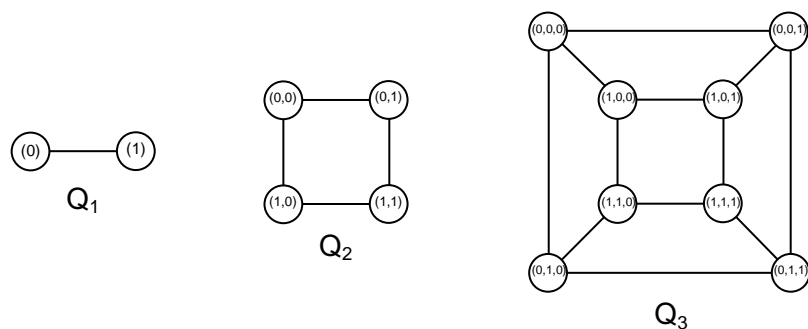
Se  $t \in F(v)$ , observe que nas colorações, descritas acima a cor  $\alpha$  sempre aparece em pelo menos uma folha, basta fazer coincidir esta folha com  $t$ .

Caso 2:  $|F(v)|=1$ . Neste caso, retire de  $t$  todas as folhas, cuja retirada não diminua  $\Delta$ . Seja  $T'(V', E')$  a árvore obtida, escolha  $v \in S_{T'}$ , recoloque todas as folhas exceto aquelas que são adjacentes a vértices de  $F_{T'}(v)$ . Seja  $T(V, E)$  a árvore obtida. Por hipótese de indução existe uma coloração equilibrada de  $T$  com  $\Delta+1$  cores de forma que  $v \in C_+$  e neste caso não é difícil obter a coloração desejada para  $T$ , usando técnicas parecidas à descritas acima, lembre que cada vértice de  $F_{T'}(v)$  tem no máximo grau 2, e um dos vértices adjacentes é  $v$  e o outro é uma folha.

## Anexo D

### Coloração Total Equilibrada em Hipercubos

Um hipercubo de dimensão  $k$  ( $k$  inteiro positivo) é um grafo cujo conjunto de vértices é formado por todas as  $k$ -uplas constituídas por “0” e “1”. Existe uma aresta entre dois vértices do hipercubo se as  $k$ -uplas correspondentes aos vértices diferem apenas de uma coordenada. Um hipercubo de dimensão  $k$ , denotado por  $Q_k$ , é um grafo regular de grau  $k$  e possui  $2^k$  vértices e  $k2^{k-1}$  arestas. A figura abaixo mostra os hipercubos  $Q_1, Q_2$  e  $Q_3$ .



Nota-se que a retirada da última coordenada de cada uma das  $k$ -uplas transforma um  $Q_k$  é obtido pela junção de dois hipercubos  $Q_{k-1}$  ao acrescentar 0 ou 1 após a última coordenada de cada uma das  $(k-1)$ -uplas.

Abaixo, será demonstrado que qualquer hipercubo  $Q_k$  pode ser colorido de forma total e equilibrada com  $(\Delta + 2)$  cores, ou seja, com  $(k + 2)$  cores. Posteriormente, também será exibida uma coloração equilibrada de  $Q_3$  com quatro cores, o que acarretará uma conjectura a respeito de que hipercubos podem ser do tipo 1.

**Teorema D.1.** (LOZANO, FRIEDMANN e JURKIEWICZ, 2008). *Qualquer hipercubo  $Q_k$  pode ser colorido de forma total e equilibrada com  $\Delta + 2$  cores, ou seja, com  $k + 2$  cores no máximo.*

**Prova. Coloração dos vértices.** Pela definição do hipercubo, observa-se que os vértices, cuja soma das coordenadas é par, não são adjacentes. O mesmo vale para o conjunto dos vértices cuja soma das coordenadas é ímpar. Esses conjuntos de vértices são coloridos respectivamente com as cores  $c_1$  e  $c_2$ . Cada cor será utilizada  $(2^{k-1})$  vezes.

**Coloração das arestas.** Para cada vértice  $u$  do hipercubo  $Q_k$ , existem  $k$  vértices adjacentes a ele. Seja  $v_i$  ( $i=1,2,3,\dots,k$ ) o vértice adjacente a  $u$ , cuja  $i$ -ésima coordenada de  $u$ ; atribui-se cor  $c_{i+2}$  à  $\{u, v_i\}$ . Dessa forma, garante-se que cada aresta  $\{u, v_i\}$  é colorida com uma cor diferente. A mesma distribuição de cores pode ser aplicada às arestas adjacentes a todos os vértices. Cada cor é utilizada  $2^{k-1}$  vezes. Observa-se que as cores  $c_0$  e  $c_1$ , que são utilizadas para colorir os vértices, não se repetem nas arestas. Tem-se também que quaisquer arestas com a cor  $c_{i+1}$  não possuem vértices em comum. De fato, se duas arestas, com a mesma cor, fossem incidentes a um vértice em comum, implicaria que os outros dois vértices, cada um deles incidente em apenas uma das duas arestas, pertenceriam à vizinhança do

vértice em comum, e pela coloração sugerida no parágrafo anterior, as arestas teriam cores diferentes.

São necessárias  $(k + 2)$  cores para colorir totalmente o hipercubo  $Q_k$ , sendo que cada cor é utilizada  $2^{k-1}$  vezes. A coloração é equilibrada.

## Anexo E

### Coloração Total Equilibrada em Toros

O toro é definido como o produto cartesiano de dois ciclos. Formalmente, o toro  $T_{j,k}$  é o grafo não orientado que tem como conjunto de vértices  $V(T_{j,k}) = \{v_{s,t} \mid 1 \leq s \leq j; 1 \leq t \leq k\}$  e cujas arestas ligam vértices  $v_{a,b}$  e  $v_{c,d}$  sempre que:

- $a = c$  e  $|d - b| = 1$  ou  $k - 1 \pmod{k}$  ou
- $b = d$  e  $|c - a| = 1$  ou  $j - 1 \pmod{j}$ .

Os toros são 4-regulares, logo, para qualquer número de vértices  $n$ , o número de arestas será  $m = 4n/2 = 2n$ . O número total de elementos a ser colorido é  $3n$ .

A seguir, será mostrada uma coloração equilibrada com 6 cores para todos os toros e uma coloração equilibrada com 5 cores para todos os toros  $T_{j,k}$  em que  $k$  é múltiplo de 5.

**Teorema E.1.** (LOZANO, FRIEDMANN e JURKIEWICZ, 2008). *Qualquer toro pode ser colorido de forma total e equilibrada com 6 cores no máximo.*

**Prova.**

**Para  $j$  par e  $k \neq 5, t \in \mathbb{Z}$ .**

No caso em questão, como o número de vértices  $n$  é par, então  $3n$  é divisível por 6, logo a coloração oferecida vai alocar a mesma cor a  $n/2$  elementos.

Para colorir totalmente toros com os dois ciclos geradores de ordem par, são utilizados “pseudo-toros” modulares do tipo  $T_{2,2}$  e  $T_{2,3}$ . A rigor, esses dois módulos são considerados como “toros degenerados”, uma vez que incluem arestas múltiplas. Esta característica, entretanto, não interfere na construção da coloração. Abaixo, na Figura 1, são indicadas as colorações dos módulos  $2 \times 2$  e  $3 \times 2$  respectivamente.

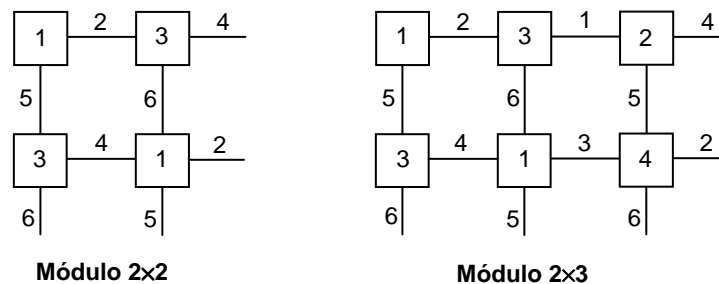


Figura 1

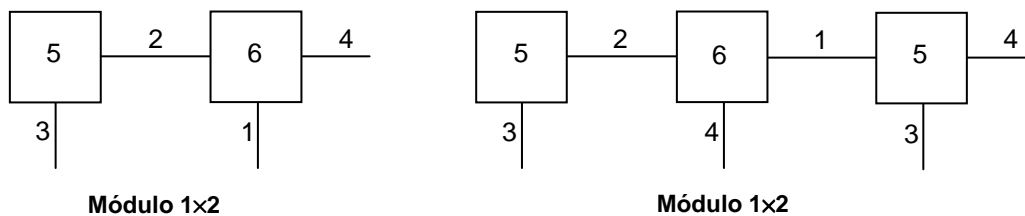
Observa-se que as colorações exibidas são equilibradas. Além disso, elas podem ser utilizadas para colorir todo e qualquer toro com  $j$  par e  $k$  qualquer. Por exemplo, para colorir um toro  $T_{8,13}$ , basta ligar os módulos, conforme indicado na tabela abaixo:

Tabela 1.

	13					
8	2x2	2x2	2x2	2x2	2x2	2x3
	2x2	2x2	2x2	2x2	2x2	2x3
	2x2	2x2	2x2	2x2	2x2	2x3
	2x2	2x2	2x2	2x2	2x2	2x3

**Para  $j$  ímpar e  $k \neq 5, t \in \mathbb{Z}$ .**

A mesma construção do item anterior é utilizada aqui com algumas diferenças. Como  $n$  é ímpar, a coloração total vai alocar cores a três classes  $(n+1)/2$  cores e a três de  $(n-1)/2$  cores. Para conseguir completar a montagem, serão utilizados dois módulos, também “degenerados” da forma  $T_{1,2}$  e  $T_{1,3}$ . A degeneração agora inclui laços, isto é, arestas ligando um vértice a ele mesmo. Outra vez, esta característica não interferirá na construção. A Figura 2 abaixo mostra os módulos  $T_{1,2}$  e  $T_{1,3}$ .



**Figura 2**

A tabela a seguir ilustra a coloração de  $T_{7,7}$  com 6 cores utilizando os quatro tipos de módulos.

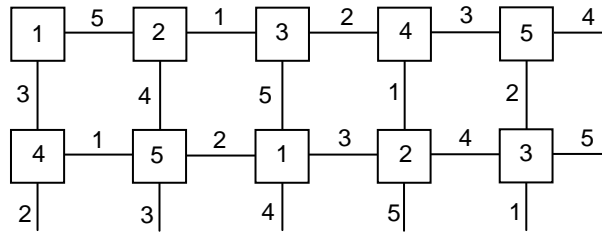
**Tabela 2.**

	7		
7	2x2	2x2	2x3
	2x2	2x2	2x3
	2x2	2x2	2x3
	1x2	1x2	1x3

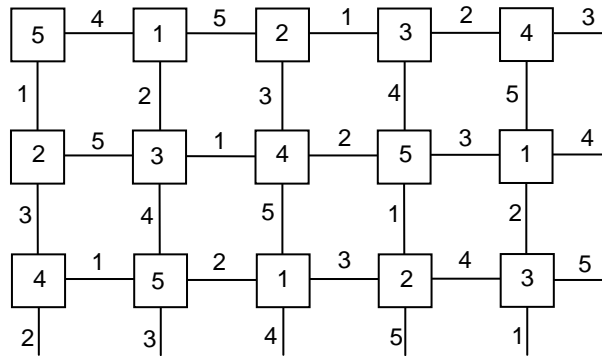
**K múltiplo de 5**

No caso particular em que  $k$  é um múltiplo de 5, é construída uma coloração total com 5 cores. Os módulos utilizados agora serão  $2 \times 5$  e  $3 \times 5$ , conforme ilustrado na Figura 3 abaixo.





Módulo 2x5



Módulo 3x5

Figura 3

Observa-se que a coloração desses módulos apresenta uma simetria circular que dá uma característica interessante: todas as cores estão presentes em exatamente  $n/5$  vértices e  $2n/5$  arestas. O processo é ilustrado na tabela abaixo com uma 5-coloração de  $T_{7,10}$ .

Tabela 3.

	<b>10</b>	
<b>7</b>	2x5	2x5
	2x5	2x5
	3x5	3x5

## Anexo F

### Coloração Total Absolutamente Equilibrada em Grafos Completos

**Definição F.1.** Dado um grafo  $G(V, E)$ , um conjunto de cores  $C$  e uma **coloração total**  $c: E \cup V \rightarrow \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , de  $G$ , com as cores de  $C$ . Esta coloração total é **absolutamente equilibrada** se, para todo par de cores  $c_i$  e  $c_j$ , tem-se  $|a(c_i) - a(c_j)| = 0$ , onde  $a(c_i) = |c^{-1}(c_i)|$ ,  $i = 1, \dots, k$ , ou, dito de outra forma,  $a(c_i)$  representa o número de aparições da cor  $c$  na coloração.

**Teorema F.1.** *Todo grafo completo admite uma coloração total absolutamente equilibrada.*

**Prova.** Denota-se por  $K_n$  o grafo completo de  $n$  vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Suponha inicialmente que  $n$  é ímpar. Sejam  $c$  uma coloração total de  $K_n$  com as cores  $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ , onde  $c(v_i) = c_i$ ,  $A = (a_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$ , uma matriz  $n \times n$ , onde para todo  $i, j = 1, \dots, n$ , tem-se que  $a_{ij} = a_{ji}$  representa a cor atribuída à aresta  $v_i v_j$  pela coloração  $c$ , sempre que  $i \neq j$ , e  $a_{ii} = c_i$  representa a cor atribuída ao vértice  $v_i$ .

É evidente que a matriz  $A$  representa um quadrado latino, pois não existe cor repetida nas linhas e nem nas colunas (pois isto significaria que elementos incidentes ou adjacentes têm a mesma cor), e em todas as linhas e colunas aparecem todas as cores, pois são  $n$  posições e  $n$  cores. Como todas as cores aparecem exatamente  $n$  vezes, a coloração é absolutamente equilibrada.

Suponha agora que  $n$  é par. Novamente sabemos que existe uma coloração total  $c$  de  $K_n$ , mas com o conjunto de cores  $\{c_1, c_2, \dots, c_{n+1}\}$ , pois não é possível colorir com  $n$  cores (ver YAP, 1996). Constrói-se uma matriz  $B = (b_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$  de forma semelhante a construção da matriz  $A$  acima. Observe que a matriz  $B$  é simétrica com relação à diagonal principal, e as cores  $c_1, \dots, c_n$  estão na diagonal. Conta-se o número de vezes que cada cor aparece na matriz fora da diagonal.

Primeiro contamos o número de vezes que aparecem as cores  $c_1, \dots, c_n$ . Como a matriz é simétrica então cada cor tem que aparecer um número par de vezes fora da diagonal, e como a cor já está na diagonal, sobram  $n - 1$  linhas ou colunas onde a cor pode aparecer. Como  $n - 1$  é ímpar, então a cor aparece no máximo  $n - 2$  vezes. Fora da diagonal existem  $n^2 - n$  posições. Se as cores  $c_1, \dots, c_n$  forem usadas  $(n - 2)$  vezes teríamos  $n(n - 2) = n^2 - 2n$  posições usadas, sobrando ainda  $n$  posições para a cor  $c_{n+1}$ . Como a cor  $c_{n+1}$  não pode aparecer mais do que  $n$  vezes, pois caso contrário teríamos que repeti-la em linha ou coluna, então cada cor  $c_1, \dots, c_n$  aparece exatamente  $(n - 2)$  vezes fora da diagonal, e a cor  $c_{n+1}$  aparece  $n$  vezes fora da diagonal. Pensando na coloração, as cores  $c_1, \dots, c_n$  aparecem  $(n - 2)/2$  vezes nas arestas e uma vez nos vértices isto é  $((n - 2)/2) + 1 = n/2$  vezes no total e a cor  $c_{n+1}$  aparece  $n/2$  vezes nas arestas. Logo, a coloração total é absolutamente equilibrada.

## Referências Bibliográficas

BEINEKE, L. W., PIPERT, R. E. "Properties and characterizations of k-trees", **Mathematika**, vol 18, pp. 141-151, 1971.

BOAVENTURA NETTO, P. O. **Grafos: Teorias, Modelos Algoritmos**. Rio de Janeiro, Edgard Blücher, 2003.

BONDY, J. A., MURTY, U. S. R. **Graph Theory with Applications**. New York, North-Holland, 1976.

CHUNLING, T., XIAOHUI, L., YUANSHENG, Y., ZHIHE, L. "Equitable Total Coloring de  $C_m \times C_n$ ", **Discrete Applied Mathematics**, 157, pp. 596-601, 2009.

DAMAS, M. P. **Sobre a solução eficiente de problemas em grafos utilizando *Treewidth e Tree-decomposition***. Dissertação de Mestrado, IME, Rio de Janeiro, 2003.

DIESTEL, R. **Graph theory**. New York, Springer-Verlag, 1997.

FONSECA, H. A. **K-árvores: caracterização, propriedades e aplicações.** Dissertação de Mestrado, IME, Rio de Janeiro, 2000.

FRIEDMANN, C. V. P., MARKENZON, L., LOZANO, A. R. G., WAGA, C. "Total Coloring of Block-Cactus Graph". **JCMCC Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing**, vol 78, pp. 273-283, 2011.

FROTA, Y. A. M. **Problemas de coloração em grafos.** Tese de Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2008.

GOLUMBIC, M. C. **Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs.** Amsterdam, Elsevier, 2004.

HAJNAL, A., SZEMERÉDI, E. "Proof of a conjecture of P. Erdős", **Combinatorial theory and its applications, II (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969)**, North-Holland, pp. 601-623, 1970.

HOLYER, I. "The NP-completeness of edge-coloring", **SIAM Journal on Computing**, vol 10, pp. 718-720, 1981.

ISOBE, S. **Algorithms for the total colorings of graphs.** Ph. D. Thesis, Tohoku University, Japan, 2002.

JURKIEWICZ, S. **Introdução à Teoria dos Grafos.** São Mateus, COPPE / EE / UFRJ, 2004.

KEMNITZ, A. e MARANGIO, M. "Total Colorings of Cartesian Products of Graphs", **Congr. Numer.**, 165, pp. 99-109, 2003.

LOZANO, A. R. G. **Coloração total equilibrada de grafos**. Tese de Doutorado em Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2005.

LOZANO, A. R. G., FRIEDMANN, C. V. P., JURKIEWICZ, S. "Coloração Total Equilibrada – Um Modelo para Redes de Interconexão", **Pesquisa Operacional**, v.28, n.1, pp.161-171, 2008.

LOZANO, A. R. G., FRIEDMANN, C. V. P., WAGA, C., MARKENZON, L. "Coloração de Vértices com Folga". In: **XLI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**, Porto Seguro. Anais do XLI SBPO, pp. 3084-3091, 2009.

LOZANO, A. R. G., FRIEDMANN, C. V. P., SIQUEIRA, A. S. "Relação entre coloração de vértices com folga e coloração total equilibrada", **Almanaque Unigranrio de Pesquisa**, v.1, pp. 103-106, 2011.

MARIN, A. **Algoritmos exatos para problemas de coloração em grafos**. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2005.

MARKENZON, L., ABREU, N. M. M., DAMAS, M. P., PEREIRA, P. R. C. "Uma Caracterização de Grafos Caminho-Completo". In: **XXXIX Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**, Fortaleza. Anais do XXXIX SBPO, 2007.

MARKENZON, L., JUSTEL, C. M., PACIORNIK, N. "Sub-classes of k-Trees:

Characterization and Recognition”, **Discrete Applied Mathematics**, Holanda, v. 154, n. 5, pp. 818-825, 2006.

MARKENZON, L., VERNET, O. “Representações Computacionais de Grafos”, **Notas em Matemática Aplicada**, São Carlos, v.27, 2006.

MARKENZON, L., VERNET, O. **Percursos em Grafos e suas Aplicações**. In: Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional. (Org.). XXXIV Simpósio Brasileiro em Pesquisa Operacional, 2002.

PEREIRA, P. R. C. **Códigos para Subfamílias de Grafos Cordais**. Tese de Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2007.

PRNAVER, K. e ZMAZEK, B. “On total chromatic number of direct product graphs”, **JAMC J. Appl. Math. Comput.**, 33, pp. 449-457, 2009.

PROSKUROWSKI, A. “Separating subgraphs in  $k$ -trees: cables and caterpillars”, **Discrete Mathematics**, vol 7, pp. 317-322, 1974.

ROSE, D. J. “On simple characterizations of  $k$ -trees”, **Discrete Mathematics**, vol 7, pp. 317-322, 1974.

SABIDUSSI, G. “Graph multiplication”, **Math. Z.**, 72, pp. 446-457, 1960.

SEOUD, M. A., MAQSUD, A. E., WILSON, R. e WILLIANS, J. “Total colourings of Cartesian products”, **Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.**, vol 28, n. 4, pp. 481-487.

VIZING, V. G. "The Cartesian product of graphs" **Vyc. Sis.**, 9, pp. 30-43, 1963.

VIZING, V. G. "Critical graphs with given chromatic class", **Metody Diskretnogo Analiza**, vol 5, pp. 9-17, 1965.

YAP, H. P. **Some topics in graph theory**. London, Cambridge University Press, 1986.

YAP, H. P. **Total colorings of graphs**. Berlin, Springer, 1996.

ZMAZEK, B. e ZEROVNIK, J. "Behzad-Vizing and Cartesian-Product Graphs", **Applied Mathematics Letters**, 15, pp. 781-784, 2002.