



COLORAÇÃO DE ARESTAS: O TEOREMA DE VIZING E SUAS CONSEQUÊNCIAS

Julia Sekiguchi da Cruz

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Orientador: Samuel Jurkiewicz

Rio de Janeiro

Maio de 2016

COLORAÇÃO DE ARESTAS: O TEOREMA DE VIZING E SUAS CONSEQUÊNCIAS

Julia Sekiguchi da Cruz

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO.

Examinada por:

Prof. Samuel Jurkiewicz, D.Sc.

Prof^a. Christina Fraga Esteves Maciel Waga, D.Sc.

Prof^a. Laura Silvia Bahiense da Silva Leite, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MAIO DE 2016

Cruz, Julia Sekiguchi da

Coloração de arestas: O Teorema de Vizing e suas consequências/Julia Sekiguchi da Cruz. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2016.

X, 44 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Samuel Jurkiewicz

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Produção, 2016.

Referências Bibliográficas: p. 42 – 44.

1. Grafos. 2. Coloração de arestas. 3. Vizing. I. Jurkiewicz, Samuel . II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Produção. III. Título.

*Dedico esta dissertação a todos
que acreditam em mim.*

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por tudo.

Ao Marcos, Thereza, Vitor e a toda minha família que está do meu lado e com a qual aprendo muito.

Ao meu noivo Rodrigo, pela força e por acreditar em mim.

Ao meu orientador Samuel, pelo suporte e aprendizado que me proporcionou ao longo deste trabalho.

Aos profissionais da COPPE/UFRJ, por todo o apoio e incentivo durante o mestrado.

Aos amigos e professores que conheci, por fazerem desta experiência algo tão prazeroso e produtivo para minha formação profissional e pessoal.

Ao Cnpq, pelo apoio financeiro.

Ou seja, a todos que, de alguma forma, foram essenciais nesta etapa da minha formação.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

COLORAÇÃO DE ARESTAS: O TEOREMA DE VIZING E SUAS CONSEQUÊNCIAS

Julia Sekiguchi da Cruz

Maio/2016

Orientador: Samuel Jurkiewicz

Programa: Engenharia de Produção

O problema de coloração de arestas é um dos mais estudados da teoria dos grafos. Ele consiste em colorir as arestas de um grafo G com o menor número de cores possível, tal que arestas adjacentes não recebam a mesma cor. Este número é chamado de índice cromático e é representado por $\chi'(G)$. A importância desse problema também se deve à sua ampla gama de aplicações.

O principal resultado da teoria de coloração de arestas é o Teorema de Vizing, obtido em 1964. Ele diz que o índice cromático de qualquer grafo G vale Δ ou $\Delta + 1$, onde Δ é o grau máximo de G . Assim, os grafos podem ser classificados em duas classes: um grafo G é classe um, se $\chi'(G) = \Delta$, ou classe dois, se $\chi'(G) = \Delta + 1$. Descobrir a qual classe pertence determinado grafo é chamado de problema da classificação. Apesar de parecer simples, este problema é NP-completo, ou seja, não é conhecido algoritmo polinomial que o resolva. Desta forma, muitos trabalhos abordam o problema da classificação de famílias de grafos com condições específicas.

Neste trabalho, fazemos um estudo sobre o Teorema de Vizing e suas consequências para a teoria de coloração de arestas. Também vemos como este resultado contribui para o estudo de grafos com condições especiais, que podem servir como forte ferramenta para o avanço desta teoria, como é o caso dos grafos críticos, um tipo especial de grafo classe dois. Diante disto, verificamos como estes resultados podem ajudar no problema da classificação de famílias particulares de grafos e de um modo geral.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

EDGE COLOURING: VIZING'S THEOREM AND IT'S CONSEQUENCES

Julia Sekiguchi da Cruz

May/2016

Advisor: Samuel Jurkiewicz

Department: Production Engineering

The edge colouring problem is one of the most studied problems of graph theory. It consists of colouring the edges of a graph G using the minimum number of colors, such that adjacent edges do not receive the same color. This number is called chromatic index and represented by $\chi'(G)$. The importance of this issue is also due to its wide range of applications.

The main result of the edge coloring is the Vizing's Theorem, obtained in 1964. It says that the chromatic index of any graph G is limited between Δ and $\Delta + 1$, where Δ is the maximum degree of G . Thus, any graph can be classified into two classes: a graph G is class one, if $\chi'(G) = \Delta$, or class two, if $\chi'(G) = \Delta + 1$. Finding out in which class belongs a particular graph is called Classification Problem. This problem seems to be simple, but it is a NP-complete problem, so it is not known a polynomial algorithm that can solve it. So that, many studies focus on the Classification Problem of graphs with specific conditions.

This work presents a study on the Vizing's Theorem and its consequences for the edge colouring theory. We also see how this result contributes to the study of graphs with special conditions, which serves as a strong tool for this theory, as in the case of critical graphs, a special type of graph class two. Moreover, we see how these results can help in the Classification Problem of particular family of graphs and in general.

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	x
1 Introdução	1
2 Coloração de Arestas em Grafos	3
2.1 Conceitos Básicos da Teoria de Grafos	3
2.2 Coloração de Arestas	9
2.3 Aplicações	10
3 Teorema de Vizing	13
3.1 O Teorema de Vizing	13
3.2 O Problema da Classificação	19
4 Coloração de Arestas de Grafos Especiais	21
4.1 Grafos Bipartidos	21
4.2 Grafos Completos	22
4.3 Árvores	23
4.4 Grafos Cubo	24
4.5 Grafos Regulares	26
4.6 Grafos t -partidos Completos	27
5 Grafos Críticos	30
5.1 Grafos Críticos	30
5.2 Grafos Planares	35
6 Conclusões	40
Referências Bibliográficas	42

Lista de Figuras

2.1	Representação de um grafo	4
2.2	O caminho P_3 e o ciclo C_6	4
2.3	Grafo completo K_5 que é 4-regular	5
2.4	Grafo bipartido completo $K_{2,3}$	5
2.5	O grafo conexo G e o grafo desconexo H	6
2.6	Árvores T_3 , T_4 e T_5	6
2.7	Representações do K_4	7
2.8	Grafo G e seu complementar G^*	7
2.9	Grafo G e seu grafo adjunto $L(G)$	8
2.10	Ciclo C_5	8
2.11	Exemplo de acoplamento	9
2.12	Coloração de vértices do grafo G	9
2.13	Coloração de arestas do grafo G	10
2.14	Grafo resultante	11
2.15	Coloração obtida	12
3.1	Leque com centro v	15
3.2	Leque com centro v onde $\alpha_j = \alpha_k$	15
3.3	Coloração das arestas dos grafos G e H	20
4.1	Coloração das arestas do K_5	23
4.2	Coloração das arestas do K_6	23
4.3	1-cubo, 2-cubo e 3-cubo, respectivamente	24
4.4	Coloração do 3-cubo.	25
4.5	4-coloração do grafo de Petersen	26
5.1	Remoção de uma aresta do grafo crítico C_5	30
5.2	Tetraedro	35

Lista de Tabelas

2.1	Tabela de tempos	11
2.2	Horário obtido	12
4.1	Coloração do 4-cubo	26
4.2	Coloração do K_3^4	29

Capítulo 1

Introdução

A teoria dos grafos possui origem relativamente recente (século XVIII), tendo sido associada a problemas de variados campos. O primeiro registro conhecido de um problema relacionado à teoria dos grafos ocorreu em 1736, por Euler, sobre a solução da questão das pontes de Königsberg. Além deste, poucos trabalhos surgiram até meados do século XIX, destacando-se o de Kirchhoff que, em 1847, utilizou modelos de grafos no estudo de circuitos elétricos, e o de Cayley, que utilizou o conceito de grafo em química orgânica.

A partir de então, diversas áreas e sub-áreas da teoria dos grafos foram desenvolvidas. Uma delas é a coloração de grafos, que surgiu com a Conjectura da Quatro Cores, formulada por Francis Guthrie a Augustus De Morgan, em 1852, a qual questionava se qualquer mapa poderia ter suas regiões pintadas usando no máximo quatro cores, onde regiões vizinhas tivessem cores distintas. Este problema foi resolvido apenas em 1976 pelos pesquisadores K. Appel e W. Haken [2], chegando-se à conclusão de que é possível colorir qualquer mapa com quatro cores, de acordo com as restrições mencionadas. A Conjectura das Quatro Cores também deu origem, mais especificamente, ao estudo da coloração de arestas de grafos. O primeiro artigo sobre este assunto foi produzido por Tait [28, 29], em 1880 e, a partir de então, muitas pesquisas sobre ele foram desenvolvidas.

O problema de coloração de arestas consiste em colorir as arestas de um grafo de tal forma que arestas incidentes em um mesmo vértice tenham cores distintas. O objetivo geral do problema de coloração é obter uma atribuição de cores que minimize o número de cores utilizadas. Este número é chamado de índice cromático. Muitas situações podem ser modeladas utilizando-se coloração de arestas, como em alocação e escalonamento de tarefas, desenho e instalação de redes elétricas, dentre outros.

Em 1964, V. G. Vizing [31] demonstrou um dos mais importantes resultados em coloração de arestas, o Teorema de Vizing. Este resultado diz que, dado um grafo G , o número mínimo de cores utilizadas para colorir suas arestas vale Δ , ou $\Delta + 1$, onde Δ é o grau máximo de G . Desta forma, é natural classificar os grafos em duas classes. Um grafo G é classe um

se seu índice cromático valer Δ , ou classe dois se seu índice cromático valer $\Delta + 1$. Decidir a qual classe pertence determinado grafo é chamado problema da classificação. Determinar a classe de um grafo parece simples, porém, em 1981, I. Holyer [20] provou que este é um problema NP-Completo, sendo, então, incerto afirmar se existe algum algoritmo com tempo polinomial que o computa. Ou seja, o tempo computacional utilizado para resolvê-lo de forma exata é inviável para instâncias de grande porte. Sendo assim, este é um assunto que vem sendo amplamente explorado no intuito de obter resultados que auxiliem no problema da classificação.

Em algumas classes específicas de grafos o problema da coloração é resolvido de forma polinomial, como é o caso do grafo bipartido, provado por Takabatake [30]. Neste sentido, diversas pesquisas foram desenvolvidas com o objetivo de obter informações sobre o índice cromático de casos mais particulares de grafos. Além disso, o estudo de classes específicas de grafos pode servir como ferramenta para se chegar a importantes resultados do problema da classificação, como é o caso do grafo crítico, uma família de grafos classe dois.

Este trabalho objetiva o estudo dos principais resultados teóricos a respeito de coloração de arestas de grafos de um modo geral e de famílias específicas, bem como, o entendimento da demonstração do Teorema de Vizing e sua importância no problema da coloração.

No capítulo 2, apresentamos os conceitos básicos de teoria de grafos, a definição de coloração e exemplos de sua aplicação. No capítulo 3, estudamos o Teorema de Vizing para grafos e multigrafos e abordamos o problema da classificação. No capítulo 4, mostramos os principais resultados sobre índices cromáticos de famílias específicas de grafos. No capítulo 5, fazemos um estudo das principais características e resultados acerca de grafos críticos, além de suas relações com o problema da classificação de um modo geral e, mais especificamente, em relação a grafos planares. Por fim, o capítulo 6 traz as conclusões do trabalho.

Capítulo 2

Coloração de Arestas em Grafos

Neste capítulo, será apresentado conceitos básicos da teoria de grafos, introdução à coloração de arestas e suas aplicações.

2.1 Conceitos Básicos da Teoria de Grafos

Um **grafo** é um par ordenado $G = (V, E)$, onde V é um conjunto finito cujos elementos são denominados **vértices** e E é um conjunto finito de pares não-ordenados de elementos pertencentes a V chamados de **arestas**.

Cada aresta de G é denotada por $e = \{u, v\} = uv$ sendo $u, v \in V$. Dizemos que a aresta e é **incidente** aos vértices u e v e que os vértices u e v são as **extremidades** da aresta e . Quando há uma aresta incidindo em dois vértices, dizemos que estes são **vértices adjacentes** ou **vizinhos**. Quando duas ou mais arestas incidem no mesmo vértice dizemos que elas são **arestas adjacentes**.

Diz-se que $G = (V, E)$ é um grafo de **ordem** n , quando $|V| = n$ e de **tamanho** m , se $|E| = m$. Um grafo G é **trivial**, quando $|V| = 1$ e $|E| = 0$. Um **multigrafo** $M = (V, E)$ pode possuir até μ arestas incidentes em cada par de vértices. O número de arestas incidentes em dois vértices u e v é chamado de **multiplicidade** de uv e é representado por $\mu(u, v)$. A maior multiplicidade μ de um multigrafo é chamada de **multiplicidade máxima**. O grafo, ou **grafo simples**, é um caso particular de multigrafo quando $\mu = 1$. Uma aresta com vértices coincidentes é denominada **laço**. Um **grafo ordenado** é aquele em que o conjunto de arestas E é formado por pares ordenados dos elementos de V . Assim, suas arestas passam a ser orientadas, sendo chamadas de **arcos** e o grafo recebe o nome de **digrafo** ou **grafo orientado**. No presente trabalho, caso não haja afirmação específica, consideraremos grafos sem laços e não-orientados.

A **vizinhança aberta** de um vértice $v \in V$ é o conjunto $N(v) = \{u \in V; uv \in E\}$. A **vizinhança fechada** de um vértice $v \in V$ é o conjunto $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. O **grau** de um

vértice $v \in V$ é $d(v) = |N(v)|$. O **grau mínimo de um grafo** G é $\delta(G) = \min_{v \in V} d(v)$ e o **grau máximo** $\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$.

Exemplo 2.1. Na Figura 2.1 temos uma representação do grafo G com conjunto de vértices $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ e o conjunto de arestas $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. A aresta $e_1 = ab$ indica que os vértices a e b são adjacentes. Temos que $d(a) = 2$, $d(f) = 3$, $\delta(G) = 2$ e $\Delta(G) = 3$.

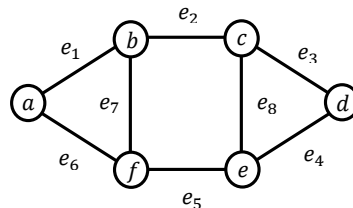


Figura 2.1: Representação de um grafo

Uma **cadeia** de v_1 a v_k é uma sequência $[v_1, v_2, \dots, v_k]$ de vértices de um grafo tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ (v_i e v_{i+1} são adjacentes) para $1 \leq i \leq k - 1$. O comprimento de uma cadeia é o número de arestas que ela contém. Um **caminho** é uma cadeia de vértices distintos. Cadeias onde o primeiro e o último vértices são iguais são denominadas **cadeias fechadas**. Um **ciclo** é um caso especial de cadeia fechada, já que o primeiro e último vértice são iguais, porém os vértices restantes são distintos entre si.

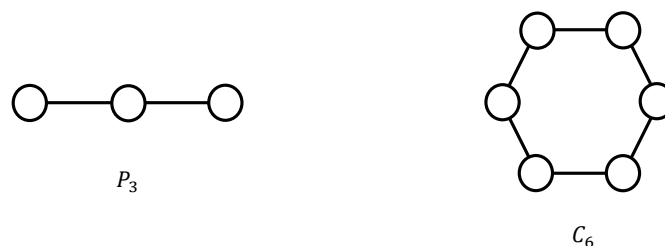


Figura 2.2: O caminho P_3 e o ciclo C_6

O **grafo caminho** P_n é o grafo com n vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$, $n - 1$ arestas e tal que cada vértice final de uma aresta é o inicial da aresta subsequente exceto o primeiro v_1 e o último v_n . O **grafo ciclo** C_n é o grafo obtido de P_n pela inclusão da aresta $\{v_1, v_n\}$.

Um grafo **completo** é aquele em que todos os seus vértices são adjacentes entre si. Esse grafo é usualmente denotado por K_n onde n é o número de vértices. Um grafo **regular de grau** k ou **k -regular** é aquele em que todos os seus vértices possuem o mesmo grau igual

a k . Grafos regulares com n vértices possuem um total de $m = \frac{n \cdot k}{2}$ arestas, já que de cada vértice é extremidade de k arestas e cada aresta incide em dois vértices. Os grafos K_n são $(n - 1)$ -regulares e possuem $m = \frac{n(n-1)}{2}$ arestas.

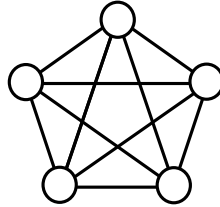


Figura 2.3: Grafo completo K_5 que é 4-regular

Um grafo G é dito **t -partido** se pudermos expressar o conjunto de vértices V como união disjunta de t conjuntos $V = V_1 \cup V_2 \dots \cup V_t$, tais que não hajam vértices adjacentes em cada conjunto V_i . Quando $t = 2$, dizemos que o grafo é **bipartido**. O grafo **bipartido completo**, indicado por K_{n_1, n_2} , possui n_1 vértices no conjunto V_1 e n_2 vértices no conjunto V_2 e cada vértice de um conjunto é adjacente a todos os vértices do outro conjunto. De maneira análoga, o grafo **t -partido completo**, indicado por K_r^t , possui r vértices em cada um dos t conjuntos V_i e cada vértice de um conjunto é adjacente a todos os vértices dos outros conjuntos.

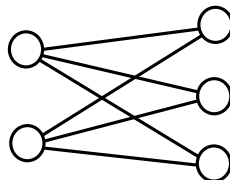


Figura 2.4: Grafo bipartido completo $K_{2,3}$

Um grafo $G' = (V', E')$ é **subgrafo** de $G = (V, E)$ quando $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Dado um subconjunto de vértices $S \subseteq V$, $G[S] = (S, \{xy \in E; x \in S \text{ e } y \in S\})$ é o **subgrafo de G induzido por S** , isto é, $G[S]$ é o subgrafo de G que tem S como conjunto de vértices e possui todas as arestas de E cujas extremidades pertençam a S . Dizemos que S é uma **clique** quando $G[S]$ for um grafo completo. Uma **k -clique**, $k \geq 1$, é uma clique em que seu conjunto de vértices tem cardinalidade k .

Seja um grafo G , $v \in V(G)$ e $e \in E(G)$. O grafo $G - v$ é o grafo obtido pela remoção do vértice v e das arestas incidentes em v . O grafo $G - e$ é o grafo obtido pela remoção da aresta e de G .

Um grafo G é **conexo** quando para qualquer par de vértices existe um caminho que os ligue. Caso exista, pelo menos, um par de vértices não ligados por um caminho, então G é **desconexo**.



Figura 2.5: O grafo conexo G e o grafo desconexo H

Em um grafo desconexo $G = (V, E)$, temos que $G' = (V', E')$ é uma **componente conexa** de G se G' for **subgrafo maximal** de G , isto é, se G' for conexo e não existir nenhum grafo conexo $G'' = (V'', E'')$ tal que $V' \subset V'' \subseteq V$ e $E' \subset E'' \subseteq E$. Observemos que na Figura 2.5, o grafo H possui duas componentes conexas. Um grafo G é **totalmente desconexo**, se $|V| = n$, $n \geq 2$, e $|E| = 0$. Um **ponto de articulação** é um vértice de G cuja remoção aumenta o número de suas componentes conexas. De maneira análoga, temos que uma **ponte** é uma aresta de G cuja remoção aumenta o número de suas componentes conexas.

Uma **árvore** é um grafo conexo sem ciclos. Uma árvore com n vértices é denotada por T_n e seus vértices de grau um são chamados de **folhas**.

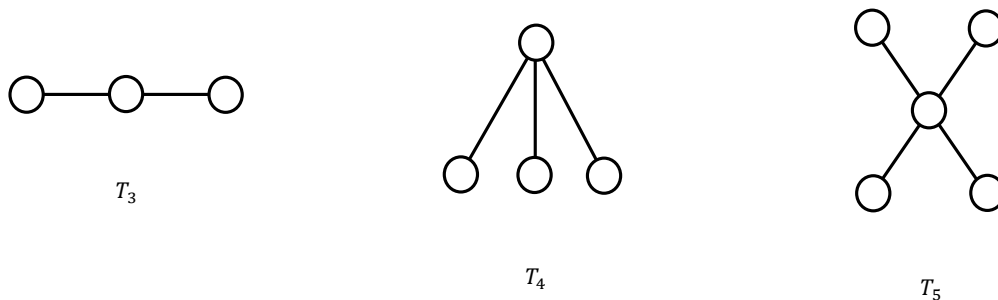


Figura 2.6: Árvores T_3 , T_4 e T_5

Um **grafo planar** é um grafo que admite, pelo menos, uma representação gráfica no plano tal que suas arestas apenas se encontrem nos vértices aos quais são incidentes. Esse tipo de representação se chama **forma topológica**, ou **grafo plano** e não é, necessariamente,

única. Portanto, um grafo não é planar quando não admite representação como um grafo plano, como é o caso do K_5 . Além disso, alguns grafos planares também podem possuir representação gráfica em que suas arestas se cruzem, como é o caso do K_4 (Figura 2.7).

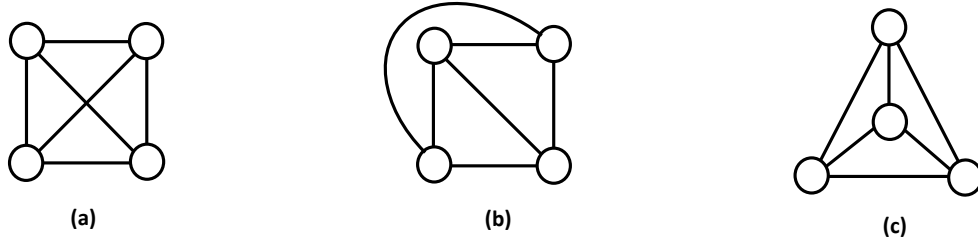


Figura 2.7: Representações do K_4

Pela Figura 2.7 verificamos que o K_4 é um grafo planar, tendo (b) e (c) como suas formas topológicas. Observamos também, que ele admite uma representação que não é um grafo plano, como vemos em (a), já que suas arestas se cruzam sem ser pelos vértices. A representação gráfica de um grafo que contenha pelo menos um ciclo separa o grafo em regiões. Então, definimos que uma **face** de um grafo planar é uma porção do plano limitada por um ciclo do grafo, tal que não contenha arestas em seu interior. A definição de face se aplica igualmente ao exterior do grafo, ou seja, à porção do plano que o circunda, sendo chamada **face ilimitada**. Na Figura 2.7, observamos que o K_4 possui um total de 4 faces. Reparemos que as árvores, que não possuem ciclos, possuem apenas uma única face, a face ilimitada. O número total de faces é representado por f .

O **grafo complementar** de um grafo $G = (V, E)$ é o grafo $\bar{G} = (V, \bar{E})$ onde um par de vértices é adjacente em \bar{G} se e somente se não for em G , ou seja, $uv \in \bar{E}$ se e somente se $uv \notin E$. Se tomarmos o complementar do grafo complementar, teremos o grafo inicial. Além disso, se sobrepuermos as representações de um grafo G e seu complementar \bar{G} , obtemos um grafo completo.



Figura 2.8: Grafo G e seu complementar G^*

O **grafo linha** ou **grafo adjunto** $L(G)$ de um grafo G é aquele cujos vértices estão em

correspondência, um a um, com as arestas de G , tal que dois vértices são adjacentes em $L(G)$ se, e somente se, as arestas correspondentes são adjacentes em G .

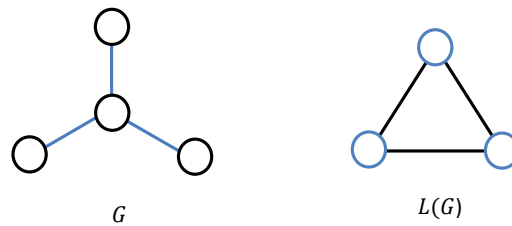


Figura 2.9: Grafo G e seu grafo adjunto $L(G)$

Um subconjunto $N \subset V$ de um grafo $G = (V, E)$ é dito **independente** ou **estável**, se para todo par $\{u, v\} \subset N$ se tem $uv \notin E$, ou seja, se todo par de vértices de N forem não adjacentes. O **número de independência** $\alpha(G)$ é a maior cardinalidade possível de um conjunto independente do grafo G . Quando um subconjunto independente N possuir $|N| = \alpha(G)$, então dizemos que ele é **independente máximo**.

Exemplo 2.2. Na Figura 2.10, o conjunto de vértices $\{a, d\}$ é independente máximo, com $\alpha(C_5) = 2$.

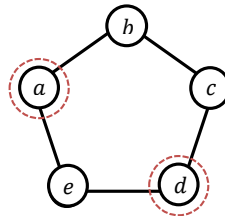


Figura 2.10: Ciclo C_5

De maneira análoga, podemos considerar um subconjunto independente de arestas, ou seja, um subconjunto $M \subset E$ de $G = (V, E)$, tal que todo par de arestas de M são não-adjacentes, ou seja, não incidem no mesmo vértice. Chamamos esse subconjunto de **acoplamento**. O **número de acoplamento** $\alpha'(G)$ é a maior cardinalidade possível de um acoplamento do grafo G . Quando um acoplamento M possuir $|M| = \alpha'(G)$, então dizemos que ele é um **acoplamento máximo**.

Exemplo 2.3. Na Figura 2.11, o conjunto de arestas $\{e_1, e_4, e_5\}$ formam um acoplamento máximo, com $\alpha'(G) = 3$.

Nem sempre é simples achar o número de independência ou de acoplamento de um grafo, não havendo, ainda, método eficiente para determiná-los.

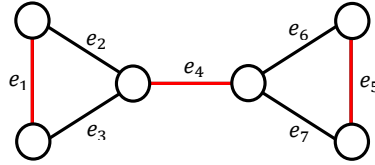


Figura 2.11: Exemplo de acoplamento

2.2 Coloração de Arestas

Consideremos $S(G) = V(G) \cup E(G)$. Uma **coloração** de um grafo $G = (V, E)$ é uma função $\pi : S' \rightarrow C$ que associa cores de C a um conjunto de elementos $S' \subseteq S(G)$ de G , tal que elementos adjacentes não recebam a mesma cor. Uma coloração em que são utilizadas k cores é chamada de k -coloração.

Quando $S' = V(G)$ dizemos que π é uma **coloração de vértices** de G . O menor inteiro k possível para se obter uma k -coloração dos vértices de G é denominado **número cromático** e denotado por $\chi(G)$.

Exemplo 2.4. Na Figura 2.12, temos uma 3-coloração de vértices do grafo G que possui número cromático $\chi(G) = 3$

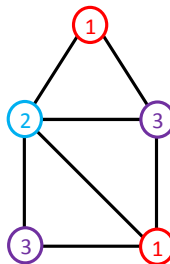


Figura 2.12: Coloração de vértices do grafo G

Analogamente, quando $S' = E(G)$ dizemos que π é uma **coloração de arestas** de G . O menor inteiro k possível para se obter uma k -coloração das arestas de G é denominado **índice cromático** e denotado por $\chi'(G)$.

Uma conclusão imediata é:

$$\chi'(G) = \chi(L(G))$$

onde $L(G)$ é o grafo adjunto de G .

Dada uma π -coloração das arestas de G , temos que uma **classe de cor** E_i é o conjunto total de arestas de G coloridas com a cor $i \in C$. Desta forma, o conjunto de arestas de G pode ser decomposto pelas classe de cores E_1, \dots, E_k .

Exemplo 2.5. Na Figura 2.13, temos uma 4-coloração de arestas do grafo G que possui índice cromático $\chi'(G) = 4$.

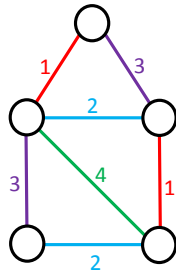


Figura 2.13: Coloração de arestas do grafo G

No Exemplo 2.5, podemos observar que $\chi'(G)$ não poderia ser menor que 4, já que esse é o valor máximo de arestas que incidem em um vértice de G , ou seja, necessitaríamos de, pelo menos, 4 cores para colorir as arestas incidentes no vértice de grau máximo. Notemos, então, que para todo grafo G , temos $\Delta(G) \leq \chi'(G)$, ou seja, o grau máximo de um grafo é um limite inferior para seu índice cromático.

Achar o índice cromático de um grafo é comprovadamente um problema NP-completo [20], sendo, então, incerto afirmar se existe algum algoritmo com tempo polinomial que o computa. Ou seja, não existe maneira eficaz de determinar o índice cromático de um grafo, de forma geral. Sendo assim, este é um tema que vem sendo amplamente estudado, principalmente devido as suas aplicações. Os primeiros trabalhos envolvendo coloração de arestas surgiram em 1880 ([28, 29], por exemplo), que resultaram na descoberta do índice cromático de famílias específicas de grafos e também na determinação de limites superiores ao índice cromático, cujo principal resultado se deve a Vizing [31] e que será tratado posteriormente neste trabalho.

2.3 Aplicações

Muitos problemas podem ser modelados utilizando-se coloração de arestas (alguns exemplos podem ser encontrados em [6, 14]). Uma de suas principais aplicações é em problemas de alocação, como o Problema de Programação de Horários (Timetabling Problem). De acordo com Wren [34], “timetabling é a alocação de objetos, sujeita a restrições de determinados recursos, em um espaço de tempo dado, de modo que sejam satisfeitos, tanto quanto possível, os objetivos desejáveis”.

Por exemplo, em um trabalho realizado pela COPPE/UFRJ [27] é apresentado um problema de timetabling que busca a elaboração de um horário de aulas alternativo ao utilizado por uma universidade em determinado semestre. Este horário deve obedecer a algumas

condições, como a carga horária de aula de cada professor para cada turma. No modelo proposto, considera-se r professores p_i , com $i = 1, \dots, r$ e s turmas t_j , com $j = 1, \dots, s$. Um professor pode lecionar somente para uma turma em cada horário e, durante um horário, uma turma pode ter aula de somente um professor. Considera-se um multigrafo bipartido, onde um conjunto independente de vértices é associado aos professores e o outro conjunto independente é associado às turmas. Além disso, existem $a_{i,j}$ arestas entre os vértices p_i e t_j , se, e somente se, o professor p_i tem que dar a_{ij} tempos de aula para a turma t_j . Por exemplo, consideremos os professores p_1 e p_2 e as turmas t_a e t_b e obedecendo às quantidades de tempos mostradas na Tabela abaixo:

Tabela 2.1: Tabela de tempos

Professor	Nº de tempos	Turma	Nº de tempos	Turma
p_1	1	t_a	2	t_b
p_2	2	t_a	1	t_b

Na Figura 2.14, temos o grafo resultante:

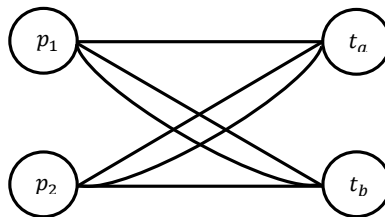


Figura 2.14: Grafo resultante

Então, colorimos as arestas do grafo resultante, cada cor representando um horário, tentando obter o menor número de cores possível. Como arestas incidentes nos mesmos vértices não podem ser pintadas com a mesma cor, então a coloração resultante atende às condições de unicidade entre professor e turma durante cada tempo. Utilizando as cores 1, 2 e 3, é possível obter a seguinte coloração da Figura 2.15:

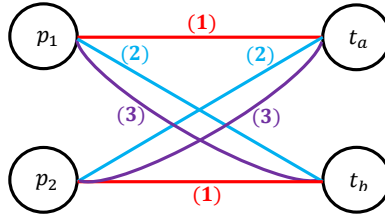


Figura 2.15: Coloração obtida

Obtemos, assim, o seguinte o horário:

Tabela 2.2: Horário obtido

Horário	t_a	t_b
1º	p_1	p_2
2º	p_2	p_1
3º	p_2	p_1

Ao obtermos a coloração mínima do grafo resultante, conseguimos minimizar a quantidade de tempos necessária para montar a grade horária das duas turmas. Como mencionado, determinar o índice cromático de um grafo é comprovadamente um problema NP-completo [20]. Porém, em algumas famílias de grafos o problema de coloração de arestas é polinomial, como o caso do grafo bipartido[30].

Capítulo 3

Teorema de Vizing

Muitos trabalhos forneceram importantes resultados na determinação de limites superiores para o índice cromático. O principal deles foi obtido por Vizing em 1964 [31], que demonstrou que o índice cromático de um grafo só pode valer Δ ou $\Delta + 1$, sendo Δ seu grau máximo. O Teorema de Vizing é considerado o resultado mais importante do estudo de coloração de arestas. A partir de então, diversas demonstrações do teorema de Vizing foram desenvolvidas (alguns exemplos na literatura em [4, 8, 16, 23]). Neste capítulo é feita a demonstração deste teorema, bem como sua versão para multigrafos e resultados relacionados.

3.1 O Teorema de Vizing

Consideremos algumas definições. Seja G um grafo, $v \in V(G)$, π uma coloração de G e C o conjunto de cores utilizado na coloração de G . Denotamos por $C_\pi(v)$, ou $C(v)$, o conjunto de cores utilizadas para colorir as arestas incidentes em v e por $C'_\pi(v)$, ou $C'(v)$, o conjunto $C - C(v)$, ou seja, o conjunto de cores de C que estão ausentes na coloração das arestas incidentes em v . Um **leque** é uma sequência $F = [vy_0, vy_1, \dots, vy_n]$ de arestas distintas, tal que, para $1 \leq i \leq n$, a aresta vy_i está colorida com uma cor que pertença a $C'(y_{i-1})$. O vértice v é considerado o **centro do leque**. O processo de atribuir a cor $\pi(vy_i)$ à aresta vy_{i-1} , para $1 \leq i \leq n$, é chamado de **recoloração do leque** F .

O resultado de Vizing é corolário do próximo teorema cuja demonstração foi obtida por Berge e Fournier [7]. A prova utilizada neste trabalho baseia-se na de Chartrand e Lesniak em [9].

Teorema 3.1. *Seja um grafo G e um inteiro positivo d , tal que $d \geq \Delta(G)$. Se o conjunto de vértices de G com grau d for vazio ou independente, então $\chi'(G) \leq d$.*

Demonstração. Provemos por indução em relação ao número de arestas m de G . É fácil ob-

servar que o teorema é verdadeiro para $m = 1$. Consideremos que o resultado seja verdadeiro para grafos de tamanho $m - 1$, onde $m \geq 2$. Seja G um grafo de tamanho m e d um inteiro positivo, com $d \geq \Delta(G)$ e tal que o conjunto de vértices de grau d é vazio ou independente. Então, mostremos que G pode ser colorido com d cores.

Seja v um vértice com grau $d(v) = \Delta(G)$ e y_0 um vértice adjacente a v com $e_0 = vy_0$. Temos que $d \geq \Delta(G) \geq \Delta(G - e_0)$. Além disso, como o conjunto de vértices de $G - e_0$ de grau d é vazio ou independente, então, pela hipótese de indução, $G - e_0$ pode ser colorido com d cores.

Consideremos uma d -coloração de $G - e_0$, ou seja, todas as arestas de G exceto e_0 são coloridas utilizando-se d cores, sendo que duas arestas adjacentes não podem ser coloridas com a mesma cor. Para cada aresta vy de G incidente em v , nós escolhemos uma cor **dual** como sendo uma dentre as d cores que pertença a $C'(y)$, ou seja, uma cor que não seja usada para colorir nenhuma aresta incidente em y . Como v possui grau máximo, então se $d = \Delta(G)$, qualquer vértice adjacente a v possuiria grau menor que v , já que o conjunto de vértices com grau d é independente. Caso $d > \Delta(G)$, então qualquer vértice de G possuiria grau menor que d . Portanto, se um vértice y for adjacente a v , então $d(y) < d$, existindo dentre as d cores, pelo menos, uma cor dual referente à aresta vy . Consideremos que e_0 possua cor dual α_1 , ou seja, nenhuma aresta incidente em y_0 é colorida com a cor α_1 . Caso não exista nenhuma aresta incidente em v com a cor α_1 , colorimos a aresta e_0 com a cor α_1 , obtendo, assim, uma d -coloração de G , concluindo a demonstração. Consideremos, então, que exista uma aresta $e_1 = vy_1$ que esteja colorida com a cor α_1 .

Seja α_2 a cor dual de e_1 . Se $\alpha_2 \neq \alpha_1$, e se existe uma aresta $e_2 = vy_2$ incidente em v assinalada com a cor α_2 (caso contrário, o teorema já estaria demonstrado), então consideremos a cor dual α_3 de e_2 . Se $\alpha_3 \neq \alpha_1, \alpha_2$, e se existe uma aresta $e_3 = vy_3$ incidente em v assinalada com a cor α_3 , então consideremos a cor dual α_4 de e_3 . Continuamos este raciocínio até chegarmos na sequência $e_0 = vy_0, e_1 = vy_1, e_2 = vy_2, \dots, e_{k-1} = vy_{k-1}$ de arestas distintas com respectivas cores duais $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$, tais que $\alpha_i \neq \alpha_j$ para $i < j < k$. Observemos que essa sequência forma um leque com centro v .

Este processo é feito até chegarmos na última aresta e_{k-1} , onde pode ocorrer duas possibilidades em relação à sua cor dual α_k :

- (i) ou $\alpha_k = \alpha_j$ para algum $j < k$;
- (ii) ou não existe nenhuma aresta incidente em v colorida com α_k .

Se (ii) ocorrer, então podemos recolorir o leque assinalando as arestas com suas respectivas cores duais, obtendo uma d -coloração de G e, assim, concluindo a demonstração. Então, consideremos a hipótese (i) de que $\alpha_k = \alpha_j$ para algum $j < k$.

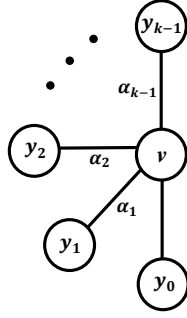


Figura 3.1: Leque com centro v

Como $d_{G-e_0}(v) < \Delta(G) \leq d$, então existe, pelo menos, uma cor α que não foi utilizada para colorir nenhuma aresta incidente em v . Caso nenhuma aresta incidente em y_{k-1} tenha sido colorida com a cor α , podemos redefinir α como sendo a cor dual de e_{k-1} e, assim, podemos recolorir o leque assinalando as arestas com suas respectivas cores duais, obtendo uma d -coloração de G . Então, consideremos que exista uma aresta incidente em y_{k-1} colorida com a cor α .

Como y_{k-1} possui uma aresta incidente com a cor α e nenhuma aresta incidente com a cor α_k , podemos considerar a cadeia $H(\alpha, \alpha_k)$ começando em y_{k-1} e terminando no vértice z , composta apenas por arestas coloridas com as cores α e α_k ¹. Caso v pertença a $H(\alpha, \alpha_k)$, então $v = z$, já que nenhuma aresta incidente em v possui a cor α . Como $\alpha_k = \alpha_j$, então para que v pertença a $H(\alpha, \alpha_k)$, é necessário que a última aresta da cadeia seja $e_j = vy_j$. Por outro lado, se o vértice y_{j-1} pertencer a $H(\alpha, \alpha_k)$, então $y_{j-1} = z$, pois nenhuma aresta incidente em v possui a cor α_j . Ou seja, não é possível que os vértices v e y_{j-1} pertençam simultaneamente à cadeia $H(\alpha, \alpha_k)$.

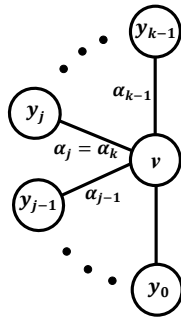


Figura 3.2: Leque com centro v onde $\alpha_j = \alpha_k$

Agora, recolorimos $H(\alpha, \alpha_k)$ intercambiando as cores α e α_k , sem prejudicar as proprie-

¹Esta técnica de formação de cadeias alternadas é bastante utilizada em problemas de coloração (como na demonstração do caso de grafos bipartidos mais adiante), sendo conhecida como cadeia de Kempe.

dades de coloração e obtendo uma nova d -coloração de $G - e_0$. Desta forma, podem ocorrer os seguintes casos:

Caso 1. Supomos que $z = v$. Com isso, y_{j-1} não pertence à cadeia e , então, nenhuma aresta incidente em v ou em y_{j-1} está colorida com a cor $\alpha_k = \alpha_j$. Assim, podemos recolorir as arestas e_0, e_1, \dots, e_{j-1} com suas respectivas cores duais, obtendo uma d -coloração de G .

Caso 2. Supomos que $z = y_{j-1}$. Com isso, v não pertence à cadeia e , então, nenhuma aresta incidente em v ou em y_{j-1} está colorida com a cor α . Assim, podemos recolorir a aresta e_{j-1} com a cor α e as arestas e_0, e_1, \dots, e_{j-2} com suas respectivas cores duais, obtendo uma d -coloração de G .

Caso 3. Supomos que $z \neq v$ e $z \neq y_{j-1}$. Com isso, nem v e nem y_{j-1} pertencem à cadeia. Além disso, nenhuma aresta incidente em v ou em y_{k-1} está colorida com a cor α . Assim, podemos recolorir a aresta e_{k-1} com a cor α e as arestas e_0, e_1, \dots, e_{k-2} com suas respectivas cores duais, obtendo uma d -coloração de G .

Provamos, então, que é possível colorir o grafo G utilizando as d cores.

□

Considerando o teorema 3.1, ao fazermos $d = \Delta + 1$ obtemos o resultado de Vizing [31].

Corolário 3.2. (*Vizing, 1964*) Para qualquer grafo G , $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$.

Quando $d = \Delta(G)$, obtemos o resultado de Fournier [15].

Corolário 3.3. (*Fournier, 1977*) Se G é um grafo cujo conjunto de todos os vértices com grau máximo $\Delta(G)$ é independente, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Vizing também obteve um limite superior para o índice cromático de multigrafos, afirmando que, dado um multigrafo M , seu grau máximo Δ e sua multiplicidade máxima μ , então $\chi'(M) \leq \Delta + \mu$. Podemos observar que o limite obtido para grafos simples é um caso particular deste. Antes de provarmos este resultado, introduziremos alguns conceitos e resultados importantes.

Seja M um multigrafo. Uma aresta e de M é **crítica** se $\chi'(M - e) < \chi'(M)$. Seja $e = vy$ uma aresta crítica de M , $\chi'(M) = q$ e π uma $(q - 1)$ -coloração de $M - e$. O conjunto de todos os vértices diferentes de v que possuam alguma aresta incidente que esteja em, pelo menos, um leque (a definição de leque é feita de forma análoga para multigrafos) com centro v e cuja primeira aresta seja e , é denotado por A_v . Definimos, também, $B_v = N(v) - A_v$. Para quaisquer dois vértices u, w em M , denotamos por $E(u, w)$ o conjunto de arestas que incidem simultaneamente em u e em w e $C(E(u, w))$ o conjunto de cores que colorem as arestas de $E(u, w)$.

Lema 3.4. *Seja M um multigrafo com aresta crítica $e = vy$, $\chi'(M) = q$, $d(v) \leq q - 1$, e π uma $(q - 1)$ -coloração de $M - e$. Então:*

(i) $C'(z) \cap C'(v) = \emptyset$ para todo $z \in A_v$;

(ii) Sendo $j \in C'(v)$ e $i \in C'(z)$, com $z \in A_v$, então a cadeia $H(j, i)$ com origem em z , formada apenas por arestas coloridas com as cores i e j , termina em v ;

(iii) Dados $z, w \in A_v$ distintos, então $C'(z) \cap C'(w) = \emptyset$.

Demonstração. Supomos que (i) seja falso. Consideremos, sem perda de generalidade, o leque $F = [vy, vy_1, \dots, vy_n]$ de centro v , com $z = y_n$ e seja $i \in C'(z) \cap C'(v)$. Então, é possível obter uma $(q - 1)$ -coloração de M recolorindo o leque F e atribuindo a cor i à aresta vz . Porém, isso contradiz a hipótese de que $\chi'(M) = q$, logo $C'(z) \cap C'(v) = \emptyset$.

Supomos que (ii) seja falso. Sendo $z \in A_v$, consideremos, sem perda de generalidade, o leque $F = [vy, vy_1, \dots, vy_n]$, com $z = y_n$, o leque que possui o menor número de arestas dentre os leques onde (ii) falha. A cadeia $H(j, i)$ com origem em z , formada apenas por arestas coloridas com as cores i e j , não pode terminar em y_k , $k < n$, pois desse modo seria possível obter um leque com última aresta em vy_k , onde (ii) falha, contradizendo a hipótese de que n deve ser mínimo. Assim, podemos recolorir $H(j, i)$ intercambiando as cores j e i , sem afetar as propriedades de coloração. Com isso, $j \in C'(z) \cap C'(v)$ na nova $(q - 1)$ -coloração de $M - e$, contradizendo (i). Logo, $H(j, i)$ termina em v .

Supomos que (iii) seja falso. Então consideremos $i \in C'(z) \cap C'(w)$, com $z, w \in A_v$ e $j \in C'(v)$. De acordo com (ii), as cadeias com origem em v e w , formadas apenas por arestas coloridas com as cores i e j devem terminar em v , o que é impossível. Logo $C'(z) \cap C'(w) = \emptyset$. \square

O resultado de Vizing para multigrafos é corolário do próximo teorema, cuja demonstração foi obtida por Andersen [1], em 1977 e Goldberg [19], em 1984. A demonstração utilizada neste trabalho baseia-se na utilizada no trabalho de Yap em [37].

Teorema 3.5. *Seja um multigrafo $M = (V, E)$, com grau máximo Δ . Então:*

$$\chi'(M) \leq \max\{\Delta, \sup_{v \in V} \sup_{\substack{A \subseteq N(v) \\ |A|=2}} [\frac{1}{2} \sum_{x \in A} d(x) + \mu(x, v)]\}$$

Demonstração. Supomos, por absurdo, que exista um multigrafo M que contradiga o teorema. Deletando algumas arestas de M , podemos obter um multigrafo M' que possua uma aresta crítica $e = vy$ e tal que, por suposição, $q = \chi'(M') = \chi'(M) > \Delta(M) \geq \Delta(M')$. Assim, denotando $d(v) = d_{M'}(v)$, temos que $d(v) \leq q - 1$. Sendo π uma $(q - 1)$ -coloração de $M' - e$, obtemos as mesmas condições do Lema 3.4.

Dadas as definições de A_v e B_v e o Lema 3.4, temos que, para todo vértice $z \in A_v$ e $w \in B_v$, então $C'(z) \cap C(E(w, v)) = \emptyset$. Isso é verdade, pois, supomos que exista uma cor $i \in C'(z) \cap C(E(w, v))$. Então, a aresta wv colorida com a cor i poderia participar do leque $F = [vy_0 = vy, vy_1, \dots, vy_{n-1} = vz, vy_n = vw]$, já que a cor i é ausente em z , contradizendo o fato de $w \in B_v$. Logo, $C'(z) \cap C(E(w, v)) = \emptyset$.

Considerando $A_v = \{y, y_1, \dots, y_n\}$, $B_v = \{z_1, \dots, z_m\}$ e o Lema 3.4, então os conjuntos $C'(v), C'(y), C'(y_1), \dots, C(E(z_1, v)), \dots, C(E(z_m, v))$ são mutuamente disjuntos. Como $\chi'(M' - e) = q - 1$, temos:

$$\begin{aligned} q - 1 &\geq |C'(v)| + |C'(y)| + \sum_{i=1}^n |C'(y_i)| + \sum_{i=1}^m |C(E(z_i, v))| \\ &= (q - 1 - (d(v) - 1)) + (q - 1 - (d(y) - 1)) + \sum_{i=1}^n (q - 1 - d(y_i)) + d(v) - \sum_{x \in A_v} \mu(x, v) \\ &= 2q + nq - n - \sum_{x \in A_v} (d(x) + \mu(x, v)) \end{aligned}$$

Com isso, $(n + 1)q \leq \sum_{x \in A_v} (d(x) + \mu(x, v)) + n - 1$ e, então:

$$q \leq \frac{\sum_{x \in A_v} (d(x) + \mu(x, v))}{n + 1} + \frac{n - 1}{n + 1}$$

Como q é inteiro positivo, então temos:

$$q \leq \max_{\substack{A \subseteq N(v) \\ |A|=2}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{x \in A} d(x) + \mu(x, v) \right\}$$

Porém isso é um absurdo, pois contradiz a hipótese de que o teorema é falso. □

A partir do Teorema 3.5, obtemos o resultado de Vizing [31] para multigrafos enunciado no Corolário 3.6.

Corolário 3.6. (*Vizing, 1964*) *Seja M um multigrafo, com grau máximo Δ e multiplicidade máxima μ , então $\Delta \leq \chi'(M) \leq \Delta + \mu$.*

Também obtemos os limites superiores encontrados por Ore [23] e Shannon [26], enunciados nos próximos Corolários.

Corolário 3.7. (*Ore, 1967*) *Seja M um multigrafo, com grau máximo Δ , então:*

$$\chi'(M) \leq \{\max\{\Delta, \sup[\frac{1}{2}(d(x) + d(y) + d(z))]\}\}$$

onde x, y e z formam um caminho em M .

Corolário 3.8. (Shannon, 1949) *Seja M um multigrafo, com grau máximo Δ , então:*

$$\chi'(M) \leq \frac{3}{2}\Delta$$

O resultado de Shannon foi obtido antes que o de Vizing, fornecendo um limite superior que depende apenas de Δ e de melhor qualidade quando $\mu \geq \frac{1}{2}\Delta$.

3.2 O Problema da Classificação

De acordo com o resultado de Vizing (Corolário 3.1), o índice cromático de qualquer grafo com grau máximo Δ pode valer Δ ou $\Delta + 1$ e, com isso, é natural dividirmos o conjunto de grafos em duas classes. Dado um grafo G , com índice cromático $\chi'(G)$, então se $\chi'(G) = \Delta$ dizemos que ele é **classe um**, e se $\chi'(G) = \Delta + 1$ dizemos que ele é **classe dois**. O **problema da classificação** é aquele que visa descobrir quais grafos são classe um e quais são classe dois.

Da mesma forma, existe um problema análogo para multigrafos. De acordo com o resultado de Vizing (3.6), o índice cromático de um multigrafo com grau máximo Δ e multiplicidade máxima μ pode valer $\Delta, \Delta + 1, \dots$ ou $\Delta + \mu$. Assim, também é natural dividirmos o conjunto de multigrafos em $\mu + 1$ classes, de acordo com seu índice cromático e chegarmos ao problema da classificação para multigrafos.

Não existe uma maneira eficaz de descobrir a classe de um grafo, pois determiná-la é comprovadamente um problema NP-completo [20]. Porém muitos trabalhos têm sido feitos no intuito de descobrir a classe de determinadas famílias de grafos de acordo com suas particularidades.

Erdős e Wilson [11] provaram que a probabilidade de um grafo de ordem n pertencer à classe um tende a 1 quando n tende ao infinito. Isso nos leva à ideia de que o número de grafos classe um é maior do que o número de grafos classe dois, apesar de não parecer intuitiva. O problema da classificação ainda continua sem solução, porém, como mencionado, certas condições podem ajudar na determinação da classe de um grafo.

Teorema 3.9. *Seja G um grafo de tamanho m , grau máximo $\Delta(G)$ e número de acoplamento igual a $\alpha'(G)$. Se*

$$m > \Delta(G) \cdot \alpha'(G)$$

então G é classe dois.

Demonstração. Supomos que G seja classe um, ou seja, $\chi'(G) = \Delta(G)$. Considerando uma Δ -coloração de G , temos que cada subconjunto de arestas coloridas com a mesma cor pode ter no máximo $\alpha'(G)$ arestas. Então, $m \leq \Delta(G) \cdot \alpha'(G)$, já que o número de subconjuntos de arestas coloridas com a mesma cor vale $\Delta(G)$. Porém isso contradiz a hipótese e, logo, G deve ser classe dois. \square

Considerando um grafo G de ordem n , então $\alpha'(G) \leq \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor$, pois, caso contrário, pelo menos duas arestas seriam adjacentes. Com isso, obtemos o próximo Corolário 3.10.

Corolário 3.10. *Seja G um grafo de tamanho m , ordem n e grau máximo $\Delta(G)$. Se*

$$m > \Delta(G) \cdot \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor$$

então G é classe dois.

A **deficiência total** de um grafo $G(V, E)$ é dada por $\sum_{v \in V} (\Delta(G) - d(v))$. Considerando que um grafo tenha n vértices e m arestas, então a sua deficiência total vale $n\Delta(G) - 2m$, já que a soma dos graus de todos os vértices vale $2m$. Caso $n\Delta(G) - 2m < \Delta(G)$ e G tenha ordem ímpar, então $m > \Delta(G)(n - 1)\frac{1}{2} = \Delta(G) \cdot \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor$. Obtemos, então o Corolário 3.11.

Corolário 3.11. *Seja G um grafo de ordem ímpar e $\Delta(G)$ seu grau máximo. Se sua deficiência total for menor que $\Delta(G)$, então G é classe dois.*

Exemplo 3.12. *Na Figura 3.12, os grafos G e H são classe dois, já que possuem ordem ímpar e deficiência total menor que seu grau máximo.*



Figura 3.3: Coloração das arestas dos grafos G e H

No próximo capítulo, estudaremos a classificação de algumas famílias específicas de grafos.

Capítulo 4

Coloração de Arestas de Grafos Especiais

Como visto, existe grande importância na determinação do índice cromático de grafos, não existindo método eficiente para encontrá-lo. Porém, diversos estudos resultaram na determinação do índice cromático de certas famílias de grafos, colaborando nas aplicações e problemas relacionados. Neste capítulo, apresentamos alguns destes resultados, sendo interessante observar os casos que necessitaram da utilização do Teorema de Vizing e suas consequências, como os grafos regulares e t -partidos completos.

4.1 Grafos Bipartidos

O Teorema 4.1 é um dos principais resultados referente à coloração de arestas de grafos e multigrafos bipartidos, provado por Dénes König [22] em 1916, tornando conhecido seu índice cromático.

Teorema 4.1. (König, 1916) *Se G é um grafo ou multigrafo bipartido com grau máximo Δ , então $\chi'(G) = \Delta$.*

Demonstração. Suponhamos que estamos colorindo as arestas, uma por uma, e dispomos de Δ cores. Ao colorirmos a aresta vw , devemos escolher uma cor que não esteja presente em nenhuma das arestas incidentes nem em v e nem em w . Se isso for possível, prosseguimos desta forma.

Caso não seja possível, observemos que as arestas incidentes em v utilizam, no máximo, $\Delta - 1$ cores, acontecendo o mesmo com o vértice w (já que a aresta vw não está colorida). Portanto, deve existir, pelo menos, uma aresta incidente em v com uma cor α ausente nas arestas incidentes em w e deve existir, pelo menos, uma aresta incidente em w com uma cor β ausente nas arestas incidentes em v . Formemos uma cadeia $H(\alpha, \beta)$ começando em v

alternando arestas coloridas com as cores α e β . Como G é bipartido, as arestas α saem de um conjunto independente para o outro e as arestas β retornam ao primeiro. Como α está ausente em w , então w não pode fazer parte da cadeia $H(\alpha, \beta)$. Com isso, podemos recolorir $H(\alpha, \beta)$ intercambiando as cores α e β , sem prejudicar as propriedades de coloração. Depois disso, a cor α estará ausente nas arestas incidentes em v e em w e poderemos colorir a aresta vw usando a cor α .

□

Corolário 4.2. *O índice cromático de $K_{r,s}$ é dado por $\chi'(K_{r,s}) = \max\{r, s\}$.*

4.2 Grafos Completos

O índice cromático de K_n é conhecido, tendo sido determinado por muitos autores que utilizaram variados métodos, (como em [3, 32]). A demonstração aqui apresentada é feita de maneira construtiva e pode ser encontrada em [14].

Teorema 4.3. *O índice cromático de K_n ($n \geq 2$), com grau máximo Δ , é dado por $\chi'(K_n) = \Delta + 1$, se n for ímpar, e $\chi'(K_n) = \Delta$, se n for par.*

Demonstração. Primeiramente, temos que $\chi'(K_n) \geq \Delta$.

Supomos que n seja ímpar. O maior número possível de arestas que podem ser coloridas com a mesma cor vale $\frac{1}{2}(n-1)$, pois, caso contrário, pelo menos duas arestas incidiriam no mesmo vértice. Com isso, $|E(K_n)| \leq \frac{1}{2}(n-1)\chi'(K_n)$ e, como $|E(K_n)| = \frac{1}{2}(n-1)n$, então $\chi'(K_n) \geq n$. Como $n = \Delta + 1$, temos que $\chi'(K_n) \geq \Delta + 1$. Para provar a igualdade, vamos construir uma n -coloração de K_n . Dado $V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e considerando a representação de K_n como um polígono regular de n lados, temos que as arestas $v_1v_n, v_2v_{n-1}, v_3v_{n-2}, \dots$ são paralelas. Da mesma forma, as arestas $v_2v_1, v_3v_n, v_4v_{n-1}, \dots$ são paralelas, assim como as arestas $v_3v_2, v_4v_1, v_5v_n, \dots$ e assim por diante. Com isso, colorimos o primeiro conjunto de $\frac{1}{2}(n-1)$ arestas paralelas com a cor 1, o segundo conjunto de $\frac{1}{2}(n-1)$ arestas paralelas com a cor 2, o terceiro conjunto de $\frac{1}{2}(n-1)$ arestas paralelas com a cor 3 e assim por diante, até o n -ésimo conjunto de $\frac{1}{2}(n-1)$ arestas paralelas com a cor n . Esse processo resulta em uma n -coloração de K_n , e como $\chi'(K_n) \geq n$, seu índice cromático vale $n = \Delta + 1$.

Agora, supomos que n seja par. É fácil ver que $\chi'(K_2) = 1$. Então, provemos que $\chi'(K_n) = \Delta$, de maneira construtiva, para $n \geq 4$. Primeiramente, escolhemos um vértice v qualquer de K_n e, então colorimos $K_n - v$ (um grafo completo de ordem ímpar) da mesma maneira que o processo anterior. Podemos observar, que em cada vértice de $K_n - v$ existe exatamente uma cor ausente dentre as $n-1$ cores utilizadas na coloração de suas arestas incidentes e, além disso, as cores ausentes são distintas entre si. Com isso, se a cor j estiver ausente nas arestas incidentes do vértice w , então podemos colorir a aresta vw com a cor j .

Repetindo esse processo para todos os vértices de $K_n - v$, obtemos uma $n - 1$ coloração de K_n . Como $n - 1 = \Delta$, então $\chi'(K_n) = \Delta$.

□

Exemplo 4.4. Na figura 4.1, podemos observar o processo de coloração das arestas paralelas de K_5 .

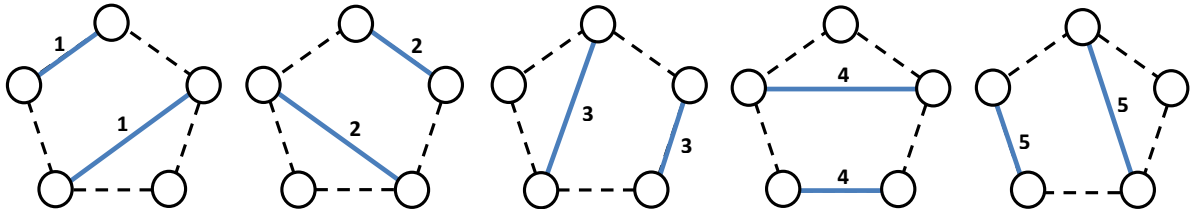


Figura 4.1: Coloração das arestas do K_5

Exemplo 4.5. Na figura 4.2, ilustramos o processo de coloração do K_6 .

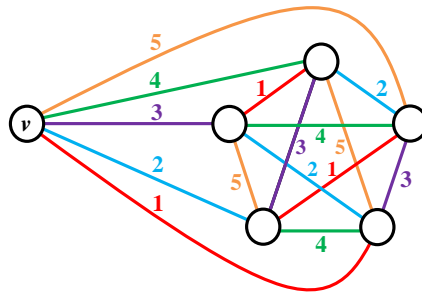


Figura 4.2: Coloração das arestas do K_6

4.3 Árvores

O índice cromático da árvore é conhecido e determinado pelo corolário do próximo teorema.

Teorema 4.6. Toda árvore é um grafo bipartido.

Demonstração. Consideremos uma árvore $G(V, E)$, ou seja, um grafo conexo sem ciclos. Seja v um vértice de G e definimos dois subconjuntos de vértices V_1 e V_2 , tais que $v \in V_1$ e:

- $w \in V_1$ se e, somente se, existe cadeia de tamanho par ligando v a w .

- $w \in V_2$ se e, somente se, existe cadeia de tamanho ímpar ligando v a w .

Como G é conexo, então $V_1 \cup V_2 = V$.

Se existir $w \in V_1 \cup V_2$, então temos uma cadeia P_1 de tamanho par ligando v a w e existe uma cadeia P_2 de tamanho ímpar ligando v a w . Concatenando essas cadeias, ou seja, unindo-as formando uma cadeia P_1P_2 começando e terminando em v , podemos concluir que G possui subciclo, o que é absurdo. Portanto $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Supomos, agora, que existam $w_1, w_2 \in V_1$ adjacentes. Como a cadeia ligando v a w_1 tem tamanho par, então a cadeia ligando v a w_1w_2 tem tamanho ímpar, o que é absurdo, já que $w_2 \in V_1$. Podemos repetir o mesmo raciocínio para V_2 . Concluimos, então, que não existem vértices adjacentes em cada um desses conjuntos.

Portanto V_1 e V_2 formam uma partição de V .

□

Corolário 4.7. *Se G é uma árvore com grau máximo Δ , então $\chi'(G) = \Delta$.*

4.4 Grafos Cubo

O **grafo cubo**, ou **k -cubo** é um grafo cujos vértices são k -uplas ordenadas de 0's e 1's, e tal que dois vértices são adjacentes se, e somente se, diferem-se em exatamente uma coordenada. Na figura 4.3 podemos ver alguns exemplos de grafos cubo.

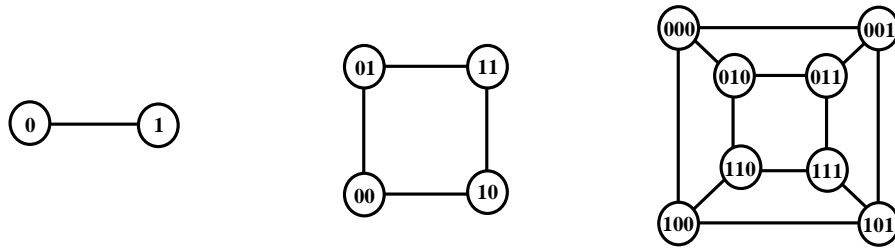


Figura 4.3: 1-cubo, 2-cubo e 3-cubo, respectivamente

O nome deste tipo de grafo faz referência ao fato da representação de um 3-cubo corresponder à planificação do cubo. O seu índice cromático é conhecido ¹, como vemos no Teorema 4.8.

Teorema 4.8. *Se G é um k -cubo, com grau máximo Δ , então $\chi'(G) = \Delta$.*

¹Grafos cubo são bipartidos e, portanto, classe um. Entretanto, a demonstração utilizada ressalta a estrutura multidimensional dessa família.

Demonstração. As arestas de G podem ser divididas em k subconjuntos disjuntos A_1, \dots, A_k , tais que uma aresta pertence à A_i , $1 \leq i \leq k$, se e somente se, os vértices os quais ela incide se diferenciam apenas pela ordenada i . Por exemplo, no 3-cubo, a aresta que liga 000 a 001 pertence a A_3 , pois os vértices os quais ela incide diferenciam-se apenas pela terceira ordenada.

Provemos, então, que as arestas de cada um desses subconjuntos formam um acoplamento. Caso contrário, existiriam pelo menos duas arestas distintas $e_1 = uv$ e $e_2 = uw$ de A_i incidentes em um mesmo vértice u . Como elas pertencem à A_i , então os vértices w e v diferem de u apenas pela ordenada i e, conseqüentemente, $v = w$. Logo, $e_1 = e_2$, o que é um absurdo. Portanto, as arestas de cada subconjunto A_i formam um acoplamento. Desta forma, podemos associar a cada subconjunto A_i uma cor i e, assim, obtemos uma k -coloração de G . Além disso, temos que $\Delta = k$, pois G é k -regular. Com isso, $\chi'(G) = \Delta$. □

Exemplo 4.9. Na figura 4.4 ilustramos um exemplo desta coloração, onde observamos que cada acoplamento A_i é formado por arestas paralelas (dessa forma, não se interceptam) na representação tridimensional do 3-cubo.

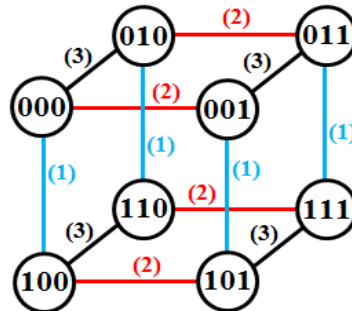


Figura 4.4: Coloração do 3-cubo.

Exemplo 4.10. Neste exemplo, temos a 4-coloração de um 4-cubo apresentada na tabela:

Tabela 4.1: Coloração do 4-cubo

Cor	Arestas							
1	0000	0001	0010	0100	0011	0101	0110	0111
	1000	1001	1010	1100	1011	1101	1110	1111
2	0000	0001	0010	1000	0011	1001	1010	1011
	0100	0101	0110	1100	0111	1101	1110	1111
3	0000	0001	0100	1000	0101	1001	1100	1101
	0010	0011	0110	1010	0111	1011	1110	1111
4	0000	0010	0100	1000	0110	1010	1100	1110
	0001	0011	0101	1001	0111	1011	1101	1111

4.5 Grafos Regulares

O problema da classificação para grafos regulares é resolvido apenas para os que possuem ordem ímpar. Como a deficiência total de um grafo regular é zero, ao considerarmos o Corolário 3.11 obtemos o seguinte resultado:

Corolário 4.11. *Se G é um grafo regular de ordem ímpar, então ele é classe dois.*

Sabemos, então, que grafos regulares de ordem ímpar são classe dois, porém grafos regulares de ordem par podem ser tanto classe um, quanto classe dois. Por exemplo, temos que o ciclo $C_n (n \geq 3)$ que é 2-regular e possui ordem n par, pode ser colorido com duas cores, sendo, portanto, classe um. Por outro lado, consideremos o **grafo de Petersen** (Figura 4.5) que é um grafo muito conhecido por servir de exemplo e contra exemplo para diversos problemas em teoria dos grafos. Ele é 3-regular, possui ordem 10 (par), porém seu índice cromático vale 4, sendo, assim, classe dois.

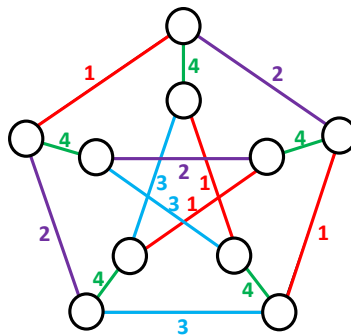


Figura 4.5: 4-coloração do grafo de Petersen

Logo, é interessante utilizarmos características específicas de grafo regulares no intuito de descobrir à qual classe eles pertencem, assim como de outros grafos relacionados.

Corolário 4.12. *Seja H um grafo Δ -regular de ordem ímpar e um grafo G obtido a partir de H deletando-se no máximo $\frac{1}{2}\Delta - 1$ de suas arestas. Então, G é classe dois.*

Obtemos o Corolário 4.12, pois a deficiência total de G vale no máximo $\Delta - 2$, e então, pelo Corolário 3.11, G é classe dois.

Corolário 4.13. *Se H é um grafo regular de ordem par e G é um grafo obtido a partir de H inserindo um vértice em uma aresta de G , então G é classe dois.*

Considerando o Corolário 4.13, supomos que H tenha n vértices e grau máximo Δ . Então G possui $n' = n + 1$ vértices e m' arestas, tais que $m' = \frac{1}{2}\Delta n + 1 > \Delta \cdot \lfloor \frac{1}{2}n' \rfloor$. Logo G é classe dois, chegando, assim, ao resultado obtido.

4.6 Grafos t -partidos Completos

O problema da classificação para grafos t -partidos completos é resolvido.

Teorema 4.14. *Seja $G = K_r^t$ um grafo t -partido completo com r vértices em cada partição. Então $\chi'(G) = \Delta + 1$, se rt for ímpar e $\chi'(G) = \Delta$, se rt for par.*

Demonstração. K_r^t é regular de grau $r(t - 1) = \Delta$. Pelo Corolário 4.11, se rt for ímpar, então G é classe dois, ou seja, $\chi'(G) = r(t - 1) + 1$.

Agora, supomos que rt seja par. Para provar que G é classe um, construiremos uma $r(t - 1)$ -coloração de G a partir de dois casos possíveis.

Caso 1. Supomos que $r = 2s$.

Seja $V(G) = (V_1 \cup V_2) \cup (V_3 \cup V_4) \cup \dots \cup (V_{2t-1} \cup V_{2t})$, onde cada vértice de $V_i = \{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{is}\}$ é adjacente a todos os outros vértices, exceto aos que pertencem a V_i e aos que pertencem a V_j que é o conjunto agrupado entre parênteses com V_i (cada partição de G é representada pela união dos conjuntos V_i e V_j agrupados entre parênteses).

Sabemos que $\chi'(K_{2t}) = 2t - 1$. Desta maneira, o conjunto de pares não-ordenados formados pelos números $\{1, 2, \dots, 2t\}$ pode ser particionado em $2t - 1$ conjuntos $A_0, A_1, \dots, A_{2t-2}$, onde um número só pode pertencer a um par de A_i exatamente uma vez (cada conjunto A_i representa uma cor utilizada em determinada coloração de K_{2t}). Sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$A_0 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2t - 1, 2t\}\}$$

Sabemos também que $\chi'(K_{s,s}) = s$. Desta maneira, o conjunto de pares ordenados formados pelos números $\{1, 2, \dots, s\}$ pode ser particionado em s conjuntos B_1, B_2, \dots, B_s , onde um número só pode aparecer exatamente uma vez como primeira ordenada e exatamente uma vez como segunda ordenada de um par ordenado de B_i (cada conjunto B_i representa uma cor utilizada em determinada coloração de $K_{s,s}$).

Utilizaremos os conjuntos A_1, \dots, A_{2t-2} e B_1, \dots, B_s para construir uma coloração de G . Suponhamos que v_{ip} e v_{jq} , sejam vértices adjacentes em G . Então, existe um único g , tal que $\{i, j\} \in A_g$ e um único h , tal que $(p, q) \in B_h$. Desta forma, obtemos uma função $\pi : v_{ip}v_{jq} \rightarrow (g, h)$ de $E(G)$ no conjunto de pares ordenados (g, h) , onde, $1 \leq g \leq 2t-2$ e $1 \leq h \leq s$ e tal que arestas adjacentes possuam imagens diferentes. Com isso, a função π pode representar uma coloração de G , associando cada aresta $v_{ip}v_{jq}$ a uma cor (g, h) e, então, $\chi'(G) = (2t-2)s = (t-1)r$.

Caso 2. Supomos que t seja par.

Seja a partição $V(G) = V_1 \cup V_3 \cup \dots \cup V_{t-1} \cup V_t$, e seja $V_i = \{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ir}\}$, onde v_{ip} e v_{jq} , $j \neq i$, são adjacentes. Definimos de forma análoga os conjuntos A_1, \dots, A_{t-1} e B_1, \dots, B_r , relacionados aos valores de $\chi'(K_t)$ e $\chi'(K_{r,r})$, respectivamente. Desta forma, existe um único g , tal que $i, j \in A_g$ e um único h , tal que $(p, q) \in B_h$. Assim, obtemos uma função $\pi : v_{ip}v_{jq} \rightarrow (g, h)$ de $E(G)$ no conjunto de pares ordenados (g, h) , onde, $1 \leq g \leq t-1$ e $1 \leq h \leq r$ e tal que arestas adjacentes possuam imagens diferentes. Com isso, a função π pode representar uma coloração de G , associando cada aresta $v_{ip}v_{jq}$ a uma cor (g, h) e, então, $\chi'(G) = (t-1)r$.

□

Exemplo 4.15. *Ilustremos um exemplo baseado na desmontração do Teorema 4.14 para construirmos a coloração do grafo K_3^4 . Neste exemplo, utilizamos o método referente ao caso 2. Baseando-se na coloração de K_4 e $K_{3,3}$, obtemos os seguintes conjuntos:*

$$A_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\},$$

$$A_2 = \{\{2, 3\}, \{1, 4\}\},$$

$$A_3 = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\},$$

$$B_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\},$$

$$B_2 = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\},$$

$$B_3 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}.$$

Podemos colorir suas arestas com as cores $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$ e $(3, 3)$, como mostra a tabela abaixo. Temos também que $\chi'(K_3^4) = 9$.

Tabela 4.2: Coloração do K_3^4

Arestas	$v_{11}v_{21}$	$v_{11}v_{23}$	$v_{11}v_{22}$	$v_{21}v_{31}$	$v_{21}v_{33}$	$v_{21}v_{32}$	$v_{11}v_{31}$	$v_{11}v_{33}$	$v_{11}v_{32}$
	$v_{12}v_{22}$	$v_{12}v_{21}$	$v_{12}v_{23}$	$v_{22}v_{32}$	$v_{22}v_{31}$	$v_{22}v_{33}$	$v_{12}v_{32}$	$v_{12}v_{31}$	$v_{12}v_{33}$
	$v_{13}v_{23}$	$v_{13}v_{22}$	$v_{13}v_{21}$	$v_{23}v_{33}$	$v_{23}v_{32}$	$v_{23}v_{31}$	$v_{13}v_{33}$	$v_{13}v_{32}$	$v_{13}v_{31}$
	$v_{31}v_{41}$	$v_{31}v_{43}$	$v_{31}v_{42}$	$v_{11}v_{41}$	$v_{11}v_{43}$	$v_{11}v_{42}$	$v_{21}v_{41}$	$v_{21}v_{43}$	$v_{21}v_{42}$
	$v_{32}v_{42}$	$v_{32}v_{41}$	$v_{32}v_{43}$	$v_{12}v_{42}$	$v_{12}v_{41}$	$v_{12}v_{43}$	$v_{22}v_{42}$	$v_{22}v_{41}$	$v_{22}v_{43}$
	$v_{33}v_{43}$	$v_{33}v_{42}$	$v_{33}v_{41}$	$v_{13}v_{43}$	$v_{13}v_{42}$	$v_{13}v_{41}$	$v_{23}v_{43}$	$v_{23}v_{42}$	$v_{23}v_{41}$
Imagens	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)

Como visto, ao considerarmos as particularidades de determinados grupos de grafos, podemos obter informações a respeito de seu índice cromático e de sua classe, podendo auxiliar no problema da classificação, de um modo geral. O estudo de uma família específica de grafo classe dois, denominada **grafo crítico**, tem contribuído muito neste sentido e será abordado no capítulo seguinte.

Capítulo 5

Grafos Críticos

Neste capítulo, estudaremos um caso particular de grafo classe dois, introduzido por Vizing, denominado grafo crítico. Como se trata de um caso mais específico, suas propriedades contribuem para o estudo do problema da classificação, já que, como será mostrado, todo grafo classe dois possui subgrafos críticos. Além disso, abordaremos um dos resultados mais importantes deste assunto chamado Lema de Adjacência de Vizing (LAV) [33].

5.1 Grafos Críticos

G é um grafo **crítico** se for conexo, classe dois e se $\chi'(G - e) < \chi'(G)$, para toda aresta e de G . Se o grau máximo de G for Δ , então dizemos que G é Δ -crítico.

Exemplo 5.1. Os ciclos ímpares C_{2k+1} são 2-crítico, já que são conexos, possuem grau máximo igual a 2 e a remoção de qualquer uma de suas arestas diminui o valor de seu índice cromático de 3 para 2. Ilustramos este exemplo na Figura 5.1.

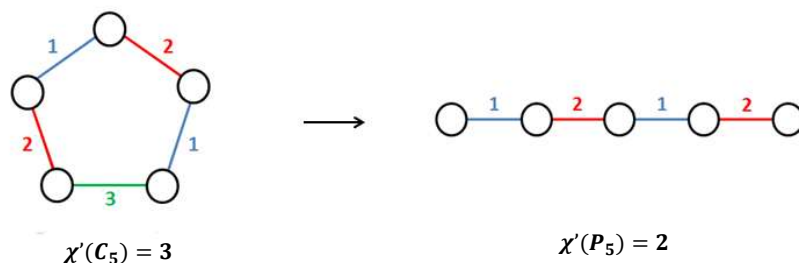


Figura 5.1: Remoção de uma aresta do grafo crítico C_5

A seguir, mostramos dois resultados simples a respeito da estrutura de grafos críticos mostrados por Vizing [32].

Teorema 5.2. *Se G é um grafo Δ -crítico e u e v são vértices adjacentes de G , então $d(u) + d(v) \geq \Delta + 2$.*

Demonstração. Já que G é crítico, então podemos colorir o grafo $G - uv$ com Δ cores. Como $\chi'(G) = \Delta + 1$, nenhuma cor dentre as Δ deve estar ausente, simultaneamente, na arestas incidentes em u e v , pois, caso contrário, poderíamos usá-la para colorir a aresta uv e, então, obteríamos uma Δ -coloração de G . Portanto, todas as Δ cores devem ser utilizadas para colorir as arestas incidentes em u e v . Logo, $(d(u) - 1) + (d(v) - 1) \geq \Delta \Rightarrow d(u) + d(v) \geq \Delta + 2$. \square

Teorema 5.3. *Um grafo crítico não possui pontos de articulação.*

Demonstração. Consideremos o grafo G , Δ -crítico e um ponto de articulação v , ou seja, um vértice cuja remoção aumenta a quantidade de componentes conexas do grafo (como G é conexo, então v desconecta o grafo). Sejam H_1, \dots, H_k as componentes conexas de $G - v$. Cada subgrafo G_i , $i = 1, \dots, k$, formado pela componente H_i sem a exclusão do vértice v , pode ser colorido com Δ cores, pois G é Δ -crítico. Porém, a coloração de cada subgrafo pode ser feita de modo que as arestas incidentes em v sejam todas diferentes, resultando em uma Δ -coloração de G , o que é absurdo. Logo G não possui pontos de articulação. \square

Corolário 5.4. *Se um grafo G é crítico, então G não possui vértices de grau um.*

De acordo da definição de grafo crítico, a retirada de qualquer aresta diminui seu índice cromático. A partir disso, mostraremos no Teorema 5.5 que o grafo crítico possui comportamento semelhante em relação a qualquer acoplamento.

Teorema 5.5. *Se G é um grafo Δ -crítico e I é um acoplamento qualquer de G , então:*

(i) *existe uma $(\Delta + 1)$ -coloração de G , onde I é uma classe de cor;*

(ii) $\chi'(G - I) = \chi'(G) - 1$.

Demonstração. Como G é crítico, então $\chi'(G - I) = k \leq \Delta$. Consideremos uma k -coloração de $G - I$, sendo C o conjunto de cores utilizadas. Podemos obter uma $k + 1$ -coloração de G associando uma cor $i \notin C$ às arestas de I , pois, se $i \in C$, obteríamos uma k -coloração de G , o que é absurdo. Como G é crítico, temos também que $k = \Delta$, sendo I é uma classe de cor (pois é formado pelo total de arestas com a cor i), provando (i). Além disso, temos que $\chi'(G - I) = k = \Delta = \chi'(G) - 1$, provando (ii). \square

O próximo resultado foi mencionado na introdução deste capítulo e revela uma forte ligação que grafos classe dois possuem com grafos críticos. Sua primeira demonstração foi feita por Vizing [33].

Teorema 5.6. *Se G é um grafo classe dois com grau máximo Δ , então G contém um subgrafo k -crítico para cada k , onde $2 \leq k \leq \Delta$.*

Demonstração. O resultado é evidente quando $k = \Delta$, pois podemos obter um subgrafo H k -crítico removendo todas as arestas de G que não diminuam seu índice cromático. O grafo resultante possui o mesmo grau máximo de G .

Consideremos, então, $2 \leq k < \Delta$. Seja H o subgrafo Δ -crítico obtido pelo procedimento anterior e uma Δ -coloração de $H - e$, onde $e = vw$ é uma aresta de H . Então, como visto na demonstração de 5.2, nenhuma cor pode estar simultaneamente ausente nas arestas incidentes em v e w . Com isso, existem, pelo menos, duas cores distintas a e b , tais que $a \in C(v)$ e $a \notin C'(w)$ e $b \in C(w)$ e $b \notin C'(v)$. Ao escolhermos uma cor i diferente de a e b e retirarmos de H todas as arestas coloridas com i , obtemos um grafo H^* com grau máximo $\Delta - 1$. (Isso é verdade, já que todo vértice diferente de v e w que possua grau Δ passará a ter grau $\Delta - 1$. Além disso, caso v ou w tenham grau Δ , então passarão a ter grau $\Delta - 1$, pois $i \neq a$ e $i \neq b$). Como as arestas coloridas por i formam um acoplamento, então, pelo Teorema 5.5, temos também que $\chi'(H^*) = \Delta$. Logo, obtemos um grafo H^* com grau máximo $\Delta - 1$ e $\chi'(H^*) = \Delta$, ou seja, classe dois. Removendo arestas de H^* , como na primeira parte da demonstração, obtemos um grafo $(\Delta - 1)$ -crítico. Desta forma, podemos continuar o processo anterior, obtendo gradativamente subgrafos k -críticos, para $2 \leq k \leq \Delta$. \square

No Teorema 5.7 vemos que os únicos grafos críticos regulares são os ciclos ímpares C_{2k+1} .

Teorema 5.7. *Não existem grafos regulares Δ -críticos, tais que $\Delta \geq 3$.*

Demonstração. Consideremos um grafo regular G de ordem ímpar e Δ -crítico ($\Delta \geq 3$). Pelo corolário 4.12, ao deletarmos no máximo $\frac{1}{2}\Delta - 1$ arestas de G , o grafo resultante H é classe dois. Mais especificamente, se deletarmos uma aresta qualquer de G , então o grafo resultante H deve ser classe dois. Como G é crítico, então $\chi'(H) = \chi'(G) - 1 = \Delta$ e, além disso, o grau máximo de H vale Δ . Portanto H é classe um, o que é absurdo.

Seja G um grafo regular de ordem par, Δ -crítico, ($\Delta \geq 3$) e seja H o grafo obtido inserindo-se um novo vértice z em uma aresta $e = uw$ de G . Então, pelo corolário 4.13, $\chi'(H) = \Delta + 1$ e como G é crítico, então $\chi'(G - e) = \Delta$. Considerando uma Δ -coloração de $G - e$, existem pelo menos duas cores distintas a e b , tais que $a \in C(u)$ e $a \notin C'(w)$ e $b \in C(w)$ e $b \notin C'(u)$. Com isso, podemos obter uma Δ -coloração de H , colorindo a aresta uz com a cor b e a aresta zw com a cor a , o que é absurdo. \square

É natural que tenha se desenvolvido uma definição análoga para multigrafos. Um multigrafo conexo M é um **multigrafo crítico** se seu índice cromático for maior que seu grau máximo e se $\chi'(M - e) < \chi'(M)$ para qualquer aresta e de M . A partir do Teorema 5.8, obtemos o Corolário 5.9 que é um importante resultado, provado por Andersen [1], a respeito da estrutura de multigrafos críticos.

Teorema 5.8. (Andersen, 77) *Seja $M = (V, E)$ um multigrafo com aresta crítica $e = xy$ e tal que*

$$q = \chi'(M) = \max_{u \in V} (d(u) + \max_{v \in V} \mu(v, u))$$

Então x é adjacente a pelo menos $q - (d(y) + \mu(y, x)) + 1$ vértices v diferentes de y , tal que $d(v) + \mu(v, x) = q$.

Demonstração. Seja $t = d(y) + \mu(y, x)$ e π uma $(q-1)$ -coloração de $G - e$. Como $d(x) \leq q-1$, obtemos as mesmas condições do Lema 3.4 e então (como na demonstração do Teorema 3.5):

$$\begin{aligned} q - 1 &\geq (q - d(x)) + (q - d(y)) + \sum_{v \in A_x - \{y\}} (q - 1 - d(v)) + (d(x) - \sum_{v \in A_x} \mu(v, x)) \\ &= q + (q - d(y)) + \sum_{v \in A_x - \{y\}} (q - d(v)) - |A_x| + 1 - (\mu(y, x) + \sum_{v \in A_x - \{y\}} \mu(v, x)). \end{aligned}$$

Desta maneira, obtemos

$$\sum_{v \in A_x - \{y\}} (q - d(v) - \mu(v, x)) \leq |A_x| - 1 - (q - t + 1).$$

Por hipótese, todo termo do lado esquerdo da inequação é não-negativo. Consequentemente, existem pelo menos $q - t + 1$ vértices v em $A_x - \{y\}$, tais que $d(v) + \mu(v, x) = q$. □

Corolário 5.9. *Seja $M = (V, E)$ um multigrafo crítico tal que*

$$q = \chi'(M) = \max_{u \in V} (d(u) + \max_{v \in V} \mu(v, u))$$

e $m(M) = \min_{u \in V} (d(u) + \min_{v \in N(u)} \mu(v, u))$. Então,

- (i) *Todo vértice x de M é adjacente a pelo menos dois vértices v tais que $d(v) + \mu(x, v) = q$;*
- (ii) *M contém, no mínimo, $q - m(M) + 1$ vértices w , tais que $d(w) + \max_{u \in V} \mu(u, w) = q$.*

O Colorolário 5.10, denominado Lema de Adjacência de Vizing (LAV), é um importante resultado obtido por Vizing [33], em 1965, a respeito da estrutura dos grafos críticos, sendo comumente utilizado na obtenção de diversos resultados. O LAV é um caso particular do Corolário 5.9 que é considerado o Lema de Adjacência para multigrafos .

Corolário 5.10. (LAV) *Seja G um grafo Δ -crítico e uma aresta $vw \in G$, onde $d(v) = k$. Então,*

(i) *se $k < \Delta$, então w é adjacente a, pelo menos, $\Delta - k + 1$ vértices de grau máximo;*

(ii) *se $k = \Delta$, então w é adjacente a, pelo menos, dois vértices de grau máximo.*

Corolário 5.11. *Se G é um grafo crítico, então todo vértice de G é adjacente a, pelo menos, dois vértices de grau máximo. Em particular, G possui, no mínimo, três vértices de grau máximo.*

Sabemos que a retirada de uma aresta de um grafo crítico G , com grau máximo Δ , diminui o valor de seu índice cromático. Esta retirada pode resultar em um grafo classe um com grau máximo Δ e índice cromático Δ , ou em um grafo classe dois com grau máximo $\Delta - 1$ e índice cromático Δ . Porém, ao considerarmos o Corolário 5.11, concluímos que o grafo resultante da retirada de uma aresta de um grafo crítico é um grafo classe um, pois, como G possui no mínimo três vértices de grau Δ , mesmo com a retirada da aresta, seu grau máximo permanece Δ .

Corolário 5.12. *Se G é um grafo Δ -crítico com grau mínimo δ , então G possui, no mínimo, $\Delta - \delta + 2$ vértices de grau máximo.*

Obtemos o Corolário 5.12 considerando os vértices v e w do Corolário 5.10 (LAV) como os vértices de grau mínimo δ e grau máximo Δ de G , respectivamente.

Diversos estudos a respeito da estrutura dos grafos críticos foram desenvolvidos, muitos deles focando, principalmente, na ordem destes tipos de grafos. Como os grafos 2-críticos são apenas os ciclos ímpares, então estas pesquisas abordam os demais valores de Δ . Em 1971, Jakobsen mostrou que não existem grafos 3-críticos com 4, 6, 8, ou 10 vértices, e que não existem multigrafos 3-críticos com 4, 6, ou 8 vértices [21]. Estes resultados o levaram a formular a Conjectura dos Grafos Críticos :

Conjectura 5.13. (Conjectura dos Grafos Críticos) *Todo grafo crítico possui ordem ímpar.*

Outros resultados ajudaram a sustentar esta conjectura, como os obtidos por Beineke e Fiorini [5] e Fiorini [13], que mostraram que qualquer grafo Δ -crítico de ordem par deve ter no mínimo 12 vértices, e para $\Delta = 3$, no mínimo 14 vértices. Posteriormente, Andersen [1] demonstrou que não existem grafos 3-críticos de ordem 14 ou 16.

Apesar destas evidências, a Conjectura dos Grafos Críticos é comprovadamente falsa. O primeiro contraexemplo foi apresentado em 1978 por Goldberg [17], que encontrou uma sequência infinita de grafos 3-críticos de ordem par, sendo o de menor ordem com 22 vértices. De forma independente, Fiol [12] obteve 2 exemplos de grafos 4-críticos de ordem 18 e 30. Também de maneira independente, Chetwynd e Wilson [10] encontrou 2 exemplos de grafos 4-críticos de ordem 16 e 18. Desde então, outros exemplos de grafos críticos de ordem par foram descobertos (ver, por exemplo, em [36]).

É natural questionar quando a Conjectura dos Grafos Críticos é verdadeira. Goldberg [18] provou que se M é um multigrafo Δ -crítico com $\chi'(M) > \frac{1}{8}(9\Delta + 6)$, então M possui ordem ímpar. Tal resultado o levou a formular a seguinte conjectura:

Conjectura 5.14. *(Goldberg, 1977) Existe uma constante $k > 2$, tal que todo multigrafo Δ -crítico com no máximo $k\Delta$ vértices possui ordem ímpar.*

5.2 Grafos Planares

O problema da classificação para os grafos planares é explorado de acordo com o grau máximo Δ do grafo. Como toda árvore é planar e classe um, então é possível encontrar grafos planares classe um de qualquer ordem e qualquer grau máximo. Assim, este estudo foca principalmente em descobrir para quais valores de Δ existem grafos planares classe dois. Para isso, é frequentemente utilizado resultados a respeito de grafos críticos, principalmente o Lema de Adjacência de Vizing.

Famílias clássicas de grafos planares são aqueles que representam poliedros. Eles são obtidos ampliando-se qualquer uma das faces deste poliedro de modo a conter todos os vértices e arestas em seu interior. A face ampliada torna-se a face ilimida. A figura 5.2 ilustra um exemplo deste tipo de grafo associado ao tetraedro:

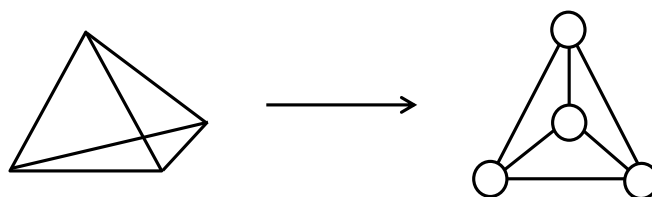


Figura 5.2: Tetraedro

Existem grafos planares de grau máximo 2, 3, 4 e 5, pertencentes à classe dois. Os ciclos ímpares são exemplos de grafo planares classe dois quando $\Delta = 2$. Para $\Delta = 3$, $\Delta = 4$ e $\Delta = 5$, consideremos os grafos obtidos pela inserção de um vértice em qualquer aresta do tetraedro, octaedro e icosaedro, respectivamente. Pelo Corolário 4.13, temos que

os grafos resultantes são classe dois. Para prosseguir o estudo para os outros valores de Δ , consideremos, primeiramente, alguns resultados importantes.

Teorema 5.15. *Se T é uma árvore, então $m = n - 1$.*

Demonstração. Fazemos por indução sobre o número de vértices. Consideremos uma árvore com $n = 1$ (grafo trivial), então vale $m = n - 1$. Vamos assumir que este resultado vale para árvores com n vértices. Então consideremos uma árvore T com $n + 1$ vértices e vamos provar que ela possui $(n + 1) - 1$ arestas. Seja v um vértice de T com $d(v) = 1$. Ao retirarmos o vértice v de T obtemos um grafo T' que possui $m = n - 1$ arestas, por hipótese de indução. Como T possui uma aresta a menos que T' , então a quantidade de arestas de T vale $m + 1 = n = (n + 1) - 1$, chegando ao resultado pretendido. \square

O próximo resultado é a relação de Euler, já conhecida no estudo de poliedros convexos:

Teorema 5.16. *Para todo grafo planar conexo vale $f - m + n = 2$.*

Demonstração. Fazemos por indução sobre o número de arestas. A fórmula é válida para $m = 1$. Consideremos um grafo planar conexo qualquer. Se for uma árvore, o resultado é válido, pois $f - m + n = 1 - (n - 1) + n = 2$. Caso possua algum ciclo, então retiramos a aresta de um ciclo e o grafo fica com uma face a menos. Pela hipótese de indução, a relação vale para o grafo obtido e dessa forma temos $(f - 1) - (m - 1) + n = 2$. Com isso, $f - m + n = 2$. \square

Teorema 5.17. *Se G é um grafo planar conexo, com $n \geq 3$, então vale $m \leq 3n - 6$.*

Demonstração. Ao contarmos a quantidade de arestas de cada face, contamos duas vezes cada aresta e, além disso, cada face possui no mínimo 3 arestas. Desta forma, temos, ao menos $\frac{3f}{2}$ arestas no grafo e, assim

$$3f \leq 2m$$

Considerando a fórmula de Euler, temos:

$$\begin{aligned} f - m + n &= 2 \\ 3f - 3m + 3n &= 6 \\ 2m - 3m + 3n &\geq 6 \\ m &\leq 3n - 6 \end{aligned}$$

\square

Corolário 5.18. *Se G é um grafo conexo e planar, então G deve possuir pelo menos um vértice com grau menor ou igual a 5.*

O Corolário 5.18 é obtido supondo-se que se um grafo conexo planar não possui vértices com grau menor ou igual a 5, então todos os seus vértices possuem grau maior ou igual a 6. Assim, $m \geq \frac{6n}{2}$ e, então $m \geq 3n$. Isso contradiz o Teorema 5.17 chegando-se, assim, ao resultado.

Corolário 5.19. *Seja G um grafo conexo e planar com n vértices, $n \geq 3$. Se G tem exatamente n_k vértices de grau k , para cada $k \geq 1$, então:*

$$5n_1 + 4n_2 + 3n_3 + 2n_4 + n_5 - n_7 - 2n_8 - 3n_9 - \dots \geq 12$$

Para obtermos o Corolário 5.19 expressamos os valores de n e m como:

$$\begin{aligned} n &= n_1 + n_2 + n_3 + \dots \\ 2m &= n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots \end{aligned}$$

Assim, ao considermos o Teorema 5.17, obtemos o Corolário 5.19:

$$\begin{aligned} 3n - 6 &\geq m \\ 6n - 2m &\geq 12 \\ 6(n_1 + n_2 + n_3 + \dots) - (n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots) &\geq 12 \\ 5n_1 + 4n_2 + 3n_3 + 2n_4 + n_5 - n_7 - 2n_8 - 3n_9 - \dots &\geq 12 \end{aligned}$$

Retomando o problema da coloração de arestas dos grafos planares, vimos que existem grafos planares classe dois quando seu grau máximo Δ vale 2, 3, 4, ou 5. Em 1965, Vizing obteve um resultado [33] que diz que todo grafo planar com grau máximo $\Delta \geq 8$ é classe um e sua prova será abordada neste trabalho. Mas, primeiramente, vamos provar um resultado obtido anteriormente por Vizing [32] cuja demonstração utiliza resultados referentes ao estudo de grafos críticos, mais especificamente o Lema de Adjacência de Vizing:

Teorema 5.20. *Se G é um grafo planar tal que seu grau máximo Δ vale no mínimo 10, então G é classe um.*

Demonstração. Seja G um grafo planar, classe dois, com grau máximo $\Delta \geq 10$ e, sem perda de generalidade, suponhamos que G seja crítico. Pelo Corolário 5.18, G possui pelo menos um vértice com grau menor ou igual a 5. Então, consideremos S como o conjunto de todos

os vértices com grau menor igual a 5. O subgrafo induzido pelos vértices de G que não estão em S é planar e, assim, contém um vértice v adjacente a, no máximo, 5 vértices que não estão em S . Além disso, v deve ser adjacente a um vértice w pertencente a S . Portanto, pelo LAV, v é adjacente a, no mínimo, $\Delta - 4 > 5$ vértices de grau máximo, o que é absurdo. \square

O Teorema 5.21 é um resultado mais forte obtido por Vizing [33], em 1965, cuja demonstração aqui utilizada foi baseada na de Yap [35]:

Teorema 5.21. *Se G é um grafo planar tal que seu grau máximo Δ vale no mínimo 8, então G é classe um.*

Demonstração. Seja G um grafo planar, classe dois, com grau máximo $\Delta \geq 8$. Pelo Teorema 5.6, G contém um subgrafo 8-crítico. Sem perda de generalidade, assumamos que G é 8-crítico. Se G tem exatamente n_k vértices de grau k , para cada $k \geq 1$, pelo Corolário 5.19, obtemos:

$$5n_1 + 4n_2 + 3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq 12 + n_7 + 2n_8$$

Pelo LAV, temos que os vértices de grau 3 só podem ser adjacentes a, no máximo, um vértice de grau 7 e a nenhum vértice com grau menor que 7 (os outros dois vértices devem ter grau 8). Os vértices de grau 4 só podem ser adjacente a, no máximo, um vértice de grau 6 (caso isso ocorra, os restantes dos vértices que eles são adjacentes valem 8), a, no máximo, dois vértices de grau 7 e a nenhum vértice com grau menor que 6. Seja r o número de vértices de grau 3 que são adjacentes a um vértice de grau 7, s o número de vértices de grau 4 que são adjacentes a um vértice de grau 6, t o número de vértices de grau 4 que são adjacentes a um único vértice de grau 7 e u o número de vértices de grau 4 que são adjacentes a dois vértices de grau 7.

De acordo com o LAV, temos:

$$n_8 \geq 2n_2 + \frac{1}{2}[3(n_3 - r) + 2r] + \frac{1}{3}[4(n_4 - s - t - u) + 3s + 3t + 2u] + \frac{1}{2}n_5 + \frac{2}{5}n_6 + \frac{1}{3}n_7$$

Então, desenvolvemos a inequação da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 2n_8 &\geq 4n_2 + 3n_3 - r + \frac{8}{3}n_4 - \frac{2}{3}s - \frac{2}{3}t - \frac{4}{3}u + n_5 + \frac{4}{5}n_6 + \frac{2}{3}n_7 \\ &\geq 4n_2 + 3n_3 + 2n_4 + n_5 + \frac{2}{3}(n_4 - s - t) + \frac{4}{5}n_6 + \frac{2}{3}(n_7 - u) + (n_7 - r - \frac{2}{3}u) - n_7 \end{aligned}$$

Como $r \leq \min\{n_3, n_7\}$ e $u \leq \min\{n_4 - s - t, n_7 - r\}$, então temos que $n_4 - s - t \geq 0$ e $n_7 - r - \frac{2}{3}u \geq 0$.

Desta forma,

$$n_7 + 2n_8 \geq 4n_2 + 3n_3 + 2n_4 + n_5$$

o que é absurdo pois contradiz o Corolário 5.19.

□

Diante dos resultados obtidos, Vizing questionou a existência de grafos planares classe dois quando seu grau máximo vale 6 ou 7, formulando, em 1965, a Conjectura do Grafo Planar [33]:

Conjectura 5.22. *Se G é um grafo planar tal que seu grau máximo Δ vale no mínimo 6, então G é classe um.*

A Conjectura do Grafo Planar foi parcialmente demonstrada em 2001 por Sanders e Zhao [25] que mostraram que grafos planares com grau máximo igual a 7 são classe um. Assim, obtém-se o Teorema 5.23, cuja demonstração foge ao escopo deste trabalho.

Teorema 5.23. *Se G é um grafo planar tal que seu grau máximo Δ vale no mínimo 7, então G é classe um.*

Apesar disto, a Conjectura do Grafo Planar continua em aberto e, então, o único caso do problema de coloração de arestas de grafos planares que resta demonstrar é quando seu grau máximo vale 6.

Capítulo 6

Conclusões

O trabalho desenvolvido procurou fornecer um estudo sobre os principais resultados teóricos a respeito de coloração de arestas, em especial sobre o Teorema de Vizing e suas consequências. A demonstração deste teorema foi feita de maneira construtiva, apresentando o uso de ferramentas bastante utilizadas na teoria de grafos, especificamente na área de coloração (como é o caso do leque).

O Teorema de Vizing deu origem ao problema da classificação que é demonstradamente um problema NP-completo. Diante disto e de sua grande quantidade de aplicações, o problema da classificação tem sido alvo de muitas pesquisas. Da mesma forma, desenvolveu-se o interesse em determinar o índice cromático de famílias específicas de grafos. Com isso, buscamos mostrar alguns casos em que já são conhecidos seu índices cromáticos, como, por exemplo, os grafos bipartidos, completos, e também daqueles cujo problema da classificação é parcialmente resolvido, como é o caso dos grafos regulares.

Também apresentamos alguns tópicos a respeito dos grafos críticos, que é um tipo específico de grafo classe dois. Seu estudo forneceu significativas contribuições para o problema da coloração, sendo uma delas a obtenção do Lema de Adjacência de Vizing. Neste trabalho, verificamos como o LAV contribuiu para a obtenção de importantes resultados no problema de coloração de grafos planares.

Outra área da coloração de grafos que tem sido bastante estudada é a **coloração total de grafos**. Uma coloração total de um grafo G é uma coloração na qual vértices adjacentes, arestas adjacentes e arestas incidentes em vértices possuem cores distintas. O **número cromático total**, representado por $\chi''(G)$, é o número mínimo de cores necessárias para se obter a coloração total de um grafo G . O conceito de coloração total foi introduzido de forma independente por Behzad e Vizing, por volta de 1965. É imediato que $\chi''(G) \geq \Delta + 1$. Analogamente ao caso de coloração de arestas, com o Teorema de Vizing, o que existe até o momento é a **Conjectura de Behzad-Vizing** ou **Conjectura da Coloração Total** [3, 31], que diz que $\chi''(G) \leq \Delta + 2$.

Assim, um grafo é dito **tipo um** ou **tipo dois** se o seu número cromático total vale $\Delta + 1$ ou $\Delta + 2$, respectivamente, porém decidir de qual tipo é um grafo é comprovadamente um problema NP-completo [24]. Muitos dos resultados que envolvem coloração total se concentram na validade da Conjectura Behzad-Vizing, ou seja, em que condições ou para que família de grafos ela é válida. Apesar dos esforços, esta conjectura permanece em aberto. O desenvolvimento da teoria de coloração de arestas pode colaborar na obtenção de avanços na teoria de coloração total, inclusive na Conjectura de Behzad-Vizing.

Referências Bibliográficas

- [1] ANDERSEN, L. D. *On edge-colourings of graphs*, Math. Scand., v. 40, n. 2 pp. 161-175, 1977.
- [2] APPEL, K. e HAKEN, W. *Every planar map is four-colorable*, Bull. Amer. Math. Soc., v. 82, pp. 711-712, 1976.
- [3] BEHZAD, M., CHARTRAND, G. e COOPER, J. K. *The colour numbers of complete graphs*, J. London Math, v. 42, pp. 226-228, 1967.
- [4] BEHZAD, M. e CHARTRAND, G. *Introduction to the Theory of Graphs*, Allyn and Bacon, Boston 1971.
- [5] BENEIKE, L. W. e FIORINI, S. *On small graphs critical with respect to edge-colourings*, Discrete Math, v. 16, pp. 109-121, 1976.
- [6] BERGE, C. *Graphs*, 3 ed., North Holland, 1989.
- [7] BERGE, C. e FOURNIER, J. C. *A short proof for a generalization of Vizing's theorem*, J. Graph Theory, v. 15, pp. 333-336, 1991.
- [8] BONDY, J. A. e MURTY, U. S. R. *Graph Theory with Applications*, Elsevier, Nova York, 1976.
- [9] CHARTRAND, G. e LESNIAK, L. *Graphs and Digraphs*, 3 ed., Chapman and Hall/CRC., 2003.
- [10] CHETWYND, A. G. e WILSON, R. J. *Snarks and supersnarks*, In The Theory and Applications of Graphs, Wiley, New York, 1981.
- [11] ERDÖS, P. e WILSON, R. J. *On the chromatic index of almost all graphs*, J. Comb. Theory Ser. B(23), pp. 255-257, 1977.
- [12] FIOL, M. A. *3-grafos criticos*, Doctoral dissertation, Barcelona University, Spain, 1980.

- [13] FIORINI, S. *The chromatic index of simple graphs*, Doctoral dissertation, The Open University, England, 1974.
- [14] FIORINI, S. e WILSON, R. J. *Edge-colorings of graphs*, 1 ed., Pitman, London, 1977.
- [15] FOURNIER, J. C. *Méthode de théorème général de coloration des arêtes d'un multigraphe*, J. Math Pures Appl, v. 56, pp. 437-453, 1977.
- [16] FOURNIER, J. C. *Colorations de arêtes d'un graphe*, Cahiers Centre Étuders Rech. Óper. v. 15, pp. 253-262, 1973.
- [17] GOLDBERG, M. K. *Construction of class 2 graphs with maximum vertex degree 3*, J. Combinatorial Theory Ser. B(31), pp. 282-291, 1981.
- [18] GOLDBERG, M. K. *Construction of multigraphs with a constraint on the chromatic class (Russian)*, Diskret Analiz, v. 30, pp. 3-12, 1977.
- [19] GOLDBERG, M. K. *Remarks on the chromatic class of multigraphs (Russian)*, Vycislitel'naya Matematika i Vycislitel'naya Tekhnika 5, pp. 128-130, 1974.
- [20] HOLYER, I. *The NP-completeness of edge-coloring*, SIAM Journal Computing, v. 10, n. 4, pp. 718-720, 1981.
- [21] JAKOBSEN, L. T. *On critical graphs with chromatic index 4*, Discrete Math, v. 9, pp. 265-276, 1974.
- [22] KÖNIG, D. *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre*, Mathematische Annalen, v.77, pp. 453-465, 1916.
- [23] ORE, O. *The Four-Colour Problem*, Nova York, Academic Press, 1967.
- [24] SANCHEZ-ARROYO, A. *Determining the total colouring number is NP-hard*, Discrete Math., v. 78, pp. 315-319, 1989.
- [25] SANDERS, D. P. e ZHAO, Y. *Planar graphs of maximum degree seven are class I*, Journal of Combinatorial Theory, v. 83, pp. 201-212, 2001.
- [26] SHANNON, C. E. *A theorem on coloring the lines of a network*, J. Maph. Phys. v. 28, pp.148-151, 1949.
- [27] SILVA, G. C., PEREIRA, R., BOAVENTURA NETTO, P. O., JURKIEWICS, S. e MEIRELLES, L. A. *Programação de Horários com Reservas no Curso de Graduação em Engenharia de Produção da UFRJ*, XXXVIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, pp. 409-420, 2006.

- [28] TAIT, P. G. *Remarks on the coloring of maps*, Proc. Royal Soc. Edin., v 10, pp. 501-503, 1880.
- [29] TAIT, P. G. *Note on a theorem in the geometry of the position*, Trans. Royal Soc. Edin., v 29, pp. 270-285, 1898.
- [30] TAKABATAKE, T. *Another simple algorithm for edge-coloring bipartite graphs*, IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, v E88-A, pp. 1303-1304, 2005.
- [31] VIZING, V. G. *On an estimate of the chromatic class of a p-graph (in Russian)*, Diskret, Analiz 3, pp. 25-30, 1964.
- [32] VIZING, V. G. *The chromatic index of a multigraph (in Russian)*, Kibernetika, v. 1, n. 3, pp. 29-39, 1965.
- [33] VIZING, V. G. *Critical graphs with a given chromatic class (in Russian)*, Diskret, Analiz 5, pp. 9-17, 1965.
- [34] WREN, A. *Scheduling, timetabling and rostering – A special relationship?*, In: Burke, E. K. e Ross, P. (editors) *The Practice and Theory of Automated Timetabling*, pp.45-75, Springer, 1996.
- [35] YAP, H. P. *On graphs critical with respect to edge-colorings*, Discrete Math., v. 37, pp. 289-296, 1981.
- [36] YAP, H. P. *On the critical graph conjecture*, J. Graph Theory 4, v. 4, pp. 309-314, 1980.
- [37] YAP, H. P. *Some Topics in Graph Theory*, London Mathematical Society Lecture Note Series, v.108, Cambridge University Press, 1986.