GRAFOS QUE MODELAM REDES CONFIÁVEIS

Leandro da Silva Teixeira

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO.

Aprovada por:

Profa. Nair Maria Maia de Abreu, D.Sc.

Prof. Leonardo Silva de Lima, D. Sc.

Profa. Maria Cristina Rangel, D. Sc.

Prof. Virgílio José Martins Ferreira Filho, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2008

TEIXEIRA, LEANDRO DA SILVA

Grafos que Modelam Redes Confiáveis

[Rio de Janeiro] 2008

XII, 96 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia de Produção, 2008)

Dissertação - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Grafos
2. Probabilidade
3. Confiabilidade

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Aos meus queridos filhos Artur e Camila

Agradecimentos

À minha amada esposa, por todo o seu companheirismo, carinho e compreensão em todos os momentos da construção deste trabalho.

Aos meus orientadores, professores Nair Maria Maia de Abreu e Leonardo Silva de Lima, agradeço a cordialidade, paciência e atenção que sempre me dispensaram.

À professora Laura Silvia Bahiense da Silva Leite pelo apoio em um momento decisivo desta dissertação.

À memória de meu pai e à minha mãe que com seus exemplos me ensinaram a vencer desafios que muitas vezes pareciam intransponíveis.

Finalmente, quero agradecer à Marinha do Brasil pela oportunidade de realizar este curso.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

GRAFOS QUE MODELAM REDES CONFIÁVEIS

Leandro da Silva Teixeira

Março/2008

Orientadores: Nair Maria Maia de Abreu
Leonardo Silva de Lima

Programa: Engenharia de Produção

Um grafo não-orientado, no qual os vértices são perfeitamente confiáveis e as arestas têm a elas associadas as mesmas probabilidades de falha, dada por ρ, que ocorrem de forma igual e independente entre si, é um clássico modelo para o estudo de confiabilidade de redes. Entende-se por confiabilidade a probabilidade de uma rede permanecer conexa mediante uma falha que isole subconjuntos de seus vértices e ou arestas. Neste trabalho, são reunidos os grafos capazes de modelar redes consideradas confiáveis, onde a cada aresta, associa-se uma probabilidade de falha ρ, escolhida no intervalo $0 < \rho \leq \rho_0$. Os principais resultados encontrados a respeito desses grafos foram refeitos, com notação mais uniforme e definições mais consistentes, visando apresentá-los de forma mais clara e didática que aquela em que foram encontrados na literatura.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

GRAPHS MODELS TO RELIABLE NETWORKS

Leandro da Silva Teixeira

March/2008

Advisors: Nair Maria Maia de Abreu
Leonardo Lima da Silva

Department: Production Engineering

A undirected graph where all nodes ares perfectly reliable and all edges failures occur independently with the same probability ρ is a classic model for network reliability studies. The network reliability is defined as the probability that the graph remains connected despite edge failures. In this work, meeting the graphs are capable to the design of reliable networks, where each edge, associates itself a probability of failure ρ, chosen in the range of values $0 < \rho \leq \rho_0$. The main findings about these graphs were made otherwise, with more uniform notation and definitions more consistent, targeting present them more clearly and didactic that they were found in the literature.

Índice

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Redes são sistemas físicos, biológicos ou sociais caracterizados por um conjunto grande de entidades bem definidas que interagem dinamicamente entre si. Muitos sistemas podem ser representados na forma de redes, dentre eles a Internet e a Web. As redes físicas incluem redes de distribuição de energia e água, redes de transporte e telecomunicações, redes de rádio e TV, dentre outras. Exemplos de redes sociais são as redes de relacionamento pessoal e/ou temático, redes de comunidades, e-mails, blogs, e redes de pesquisadores e de publicações. Cadeias alimentares e redes de transmissão de doenças são exemplos de redes biológicas. Vivemos, portanto, num mundo rodeado por redes e, certamente, direta ou indiretamente, fazemos parte de quase todas as redes citadas acima.

Como conseqüência do que foi dito acima, a representação, o estudo e a modelagem de redes são de grande interesse na área científica. Há um relacionamento intrínseco entre suas estruturas, funções e propriedades. A estrutura de uma rede pode ser representada por um grafo. Desta forma, a utilização de ferramentas da teoria dos grafos é fundamental na determinação de propriedades referentes a aspectos topológicos de redes. Contudo, as redes modernas, como a *World Wide Web*, por possuírem milhões ou até mesmo bilhões de vértices, tornam ineficazes os métodos tradicionais de desenhar estruturas topológicas para grafos enormes capazes de modelá-las. Pesquisas recentes têm revelado que uma alternativa para este problema é determinar características e propriedades de grafos de ordem muito grande, a partir da análise do comportamento dos vértices e das arestas em grafos pequenos. Dessa forma, o estudo da vulnerabilidade e da confiabilidade de redes passa a ser de vital importância.

Entende-se por vulnerabilidade o estudo de parâmetros capazes de medir a fragilidade de uma rede mediante a um ataque capaz de isolar um ou mais subconjuntos de vértices e/ou arestas do grafo que a modela. Uma rede é mais vulnerável que outra, quando, em caso de ataque ou falha, a primeira está mais propensa à desconexão que a segunda. Desta forma, parâmetros da teoria dos grafos, tais como conectividade de vértice e de aresta, cardinal de conectividade de vértice e arestas, persistência, *etc.* vêm sendo freqüentemente estudados. Uma discussão mais detalhada a respeito desses parâmetros pode ser encontrada em Reis Neto [66] e Lima [49].

Segundo Lima [49], enquanto a vulnerabilidade de redes é considerada uma medida negativa, já que redes mais vulneráveis são estruturalmente fracas, a confiabilidade é classificada como uma medida positiva, por ser entendida como a probabilidade que uma rede tem de permanecer conexa mesmo quando, após uma falha, acarretar na remoção de um ou mais de seus subconjuntos de vértices e/ou arestas. Assim, redes altamente confiáveis são estruturas fortes e diz-se que uma rede é mais confiável que outra se a probabilidade da primeira ser desconectada for menor que a da segunda. Concluímos que enquanto os parâmetros de vulnerabilidade são determinísticos, os de confiabilidade são calculados por funções probabilísticas que envolvem parâmetros determinísticos da teoria dos grafos.

Durante esta pesquisa bibliográfica observou-se que o assunto é extenso e que realmente tem atraído a atenção de inúmeros pesquisadores, dentre os quais podemos citar, Bauer *et al.* [9], Hui [43], Wang e Zhang [75], Colbourn [25], Deng *et al.* [27], Boesch *et al.* ([15], [16], [17], [18],[19], [20]).

Por isso, restringimos este trabalho ao estudo de confiabilidade de uma rede, a partir de uma função probabilística de confiabilidade definida por Kelmans [45] e utilizada por Bauer *et al.* ([9] e [10])

$$P(G, \rho) = \sum_{i=\lambda}^{m} m_i (1-\rho)^i \rho^{m-i}. \tag{1.1}$$

Esta medida considera uma rede modelada por um grafo G com n vértices e m arestas, onde os vértices são considerados perfeitamente confiáveis, não estão sujeitos a falhas e cada aresta tem a mesma probabilidade de falha ρ a ela associada, tais que duas a duas são independentes entre si. Portanto, a função que valora as arestas é probabilística e dependente de dois parâmetros determinísticos de vulnerabilidade: um deles, $m_i(G)$, é a quantidade de cortes de arestas com tamanho i e, o outro, $\lambda(G)$, é a conectividade de aresta de G.

Assim, o que pretendemos aqui é descrever famílias de grafos capazes de minimizar a probabilidade de falha de uma rede valorada pela função (1.1), ou seja, descrever famílias de grafos, em que cada um deles seja capaz de modelar uma rede considerada confiável.

Para isso, esta dissertação se desenvolve a partir desta introdução, seguindo-se pelo Capítulo 2, onde além de reunirmos os conceitos básicos de Teoria dos Grafos relativos à conectividade e à vulnerabilidade, apresentamos algoritmos de construção de grafos candidatos a modelar redes confiáveis, desenvolvidos por Harary [41], Hakimi [38] e Bauer *et al.* [9]. Neste mesmo capítulo, fazemos uma comparação desses algoritmos. No Capítulo 3, reunimos as principais funções probabilísticas para o cálculo de medidas de confiabilidade e apresentamos uma discussão sobre o parâmetro probabilístico ρ. No fim deste capítulo, uma família de grafos capaz de minimizar $P(G, \rho)$, para ρ, $0 \leq \rho \leq 1$ é descrita. O Capítulo 4 é mais específico com relação a grafos capazes de minimizar a função probabilística dada em (1.1). Ele trata de uma família de grafos, chamada de grafos *max* λ *& min* m_λ, denotada por G_{λ,m_λ}, em que cada elemento pertencente a esta família, é capaz de minimizar $P(G, \rho)$, $0 \leq \rho \leq \rho_0$, quando λ, a conectividade de aresta de G é tal que $\lambda \geq 3$. As provas dos principais teoremas encontrados na literatura são refeitas e um algoritmo para construção de G_{λ,m_λ} é apresentado. No Capítulo 5, são estudados os grafos *max* λ *& min* m_λ que minimizam $P(G, \rho)$ para $\lambda = 2$. Desenvolvemos também um algoritmo para construção desses grafos. No capítulo 6, descrevemos uma generalização de grafos *max* λ *& min* m_λ para grafos *max* λ *& min* m_i, para $i = \lambda + 1$, com base no texto de Wang e Zhang [75]. Além disso, nos respectivos casos em que $\lambda = 3$ e/ou $\lambda \geq 4$, apresentamos condições para que um grafo *max* λ *& min* m_i , quando $i = \lambda + 1$, seja *max* λ *& min* m_λ. As considerações finais e propostas de trabalhos futuros são apresentadas no último capítulo.

Capítulo 2

Conceitos e Resultados Básicos

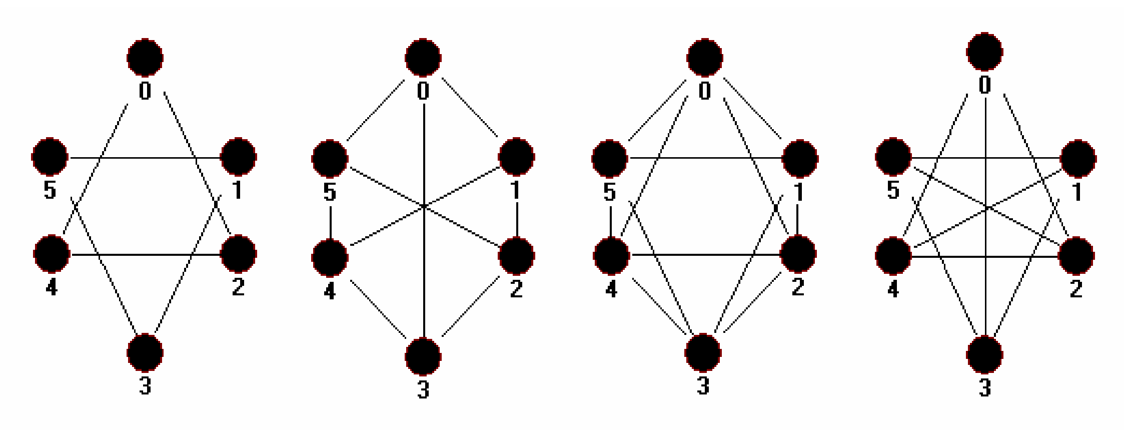
Este capítulo começa com conceitos e resultados básicos da Teoria dos Grafos relativos à conexidade tais como, conectividade de vértice, de aresta, caminho, grafos com máxima conectividade de vértice e aresta. Nas Seções 2.1 e 2.2 são apresentados os principais resultados disponíveis na literatura sobre grafos de Harary e grafos de Hakimi que são de grande interesse na modelagem de redes consideradas confiáveis. Concluímos o capítulo, com uma comparação entre estes grafos na seção 2.3. As principais fontes bibliográficas para o desenvolvimento deste capítulo foram Boaventura Neto [14], Harary [40], Gross e Yellen [36] e Lima [49].

2.1 Principais conceitos e resultados de teoria dos grafos

Consideremos $G= (V, E)$ um grafo simples, conexo e não-orientado, cujo conjunto de vértices V tem cardinalidade $|V| = n$ e o conjunto de arestas E tem cardinalidade $|E| = m$. Dizemos que $G = (V, E)$ *é* um grafo *trivial se* $|V| = 1$ e $|E| = 0$. Duas ou mais arestas de G que compartilham um mesmo vértice são ditas *incidentes* e, caso não tenham vértices em comum, são ditas *independentes*. Em verdade, elas só possuirão dois vértices em comum, se o grafo considerado for um *multigrafo,* isto é, se a presença de mais de uma aresta entre um mesmo par de vértices for permitida. Nos raros casos em que arestas múltiplas são permitidas em G, o seu uso será explicitado.

O *grau* de um vértice, $d(v)$, é dado pelo número de arestas nele incidentes. E a seqüência de graus de G é dada por $[d(v_1) \leq d(v_2) \leq \ldots \leq d(v_n)]$, onde o grau mínimo é denotado por $\delta(G) = d(v_1)$ e o máximo por $\Delta(G) = d(v_n)$. Um grafo é regular quando todos os vértices têm o mesmo grau.

Os *grafos circulantes* formam uma subclasse dos grafos regulares. Eles são assim definidos. Consideremos $n \in N^*$. Dados $l \in \mathrm{N}$ e inteiros $k_1 < k_2 < \ldots < k_l \in \{1; 2; \ldots, \lfloor n/2 \rfloor\}$, dizemos que G é um *grafo circulante* quando um vértice de rótulo i é adjacente aos vértices $i + k_r$ reduzidos a módulo n para $r = 1, 2, \ldots, l$. Neste caso, denotamos por $G = C_i\,(n; k_1, \ldots, k_l)$. Assim, por exemplo, para $n = 5$, $C_i\,(5; 1) = C_i\,(5; 2) = C_5$: Para $n = 6$, $C_i\,(6; 1) = C_6$ e $C_i\,(6; 1, 2, 3) = K_6$. Na Figura 2.1 ilustramos os outros *grafos circulantes* com $n = 6$ vértices. De modo geral, $C_i\,(n; 1) = C_n$, para todo inteiro $n \geq 3$ e $C_i\,(n; 1, 2, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor) = K_n$, para cada $n \geq 2$.



(a) $C_i\,(6; 2)$ (b) $C_i\,(6; 1\ 3)$ (c) $C_i\,(6; 1\ 2)$ (d) $C_i\,(6; 2\ 3)$.

Figura 2.1: Exemplos de Grafos Circulantes com 6 vértices e $k_1 = 2$ em (a); $k_1 = 1$ e $k_2 = 3$ em (b); $k_1 = 1$ e $k_2 = 2$ em (c) e $k_1 = 2$ e $k_2 = 3$ em (d).

Um grafo $G' = (V', E')$ é um *subgrafo* de $G = (V, E)$ quando $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Caso G' seja obtido de G pela supressão de vértices tal que, para todo $v_{i,}\ v_j \in V'$, se $(v_i, v_j) \in E'$ então $(v_i, v_j) \in E$, G' é um *subgrafo induzido* de G, denotado por $G' = G[V']$. Quando G' é um subgrafo obtido apenas pela supressão de arestas de G, então G' é um *subgrafo gerador.*

Um *grafo completo* de ordem n, K_n, é aquele em que cada par de vértices é ligado por uma aresta. Portanto, todo grafo completo é regular de grau n-1. Se para algum subconjunto de vértices V', o subgrafo induzido $G[V']$ formar um grafo completo, $G[V']$ é dito ser uma clique de G.

Um *percurso* é uma seqüência de arestas sucessivamente incidentes, tendo cada uma delas, uma extremidade adjacente à anterior e a outra, à subseqüente. O percurso será *fechado,* se a última ligação da seqüência for adjacente à primeira e, será *aberto,* em caso contrário. Um percurso será *simples* se não repetir arestas. Um *caminho* P_n é um grafo de ordem n formado por uma seqüência alternada e finita de vértices distintos e arestas distintas, que se inicia num vértice v_i e termina num vértice v_j, onde cada aresta da seqüência liga o vértice que a antecede ao que a sucede. Um caminho em G de comprimento k contém exatamente k+1 vértices. É fácil ver que todo caminho é um percurso, onde não há repetição de arestas. C*aminhos disjuntos por arestas* são caminhos que não compartilham nenhuma aresta. Um *n-ciclo*, denotado por C_n, é um caminho de comprimento $n \geq 3$, em que somente o primeiro e o último vértices coincidem e uma *corda* é uma aresta que une dois vértices não consecutivos de um ciclo. Uma *árvore* é um grafo conexo sem *ciclos*.

Proposição 2.1.1: As seguintes afirmações são equivalentes e todas caracterizam grafos que são árvores:

i) G é uma árvore;

ii) G é sem *ciclos* e tem n-1 arestas;

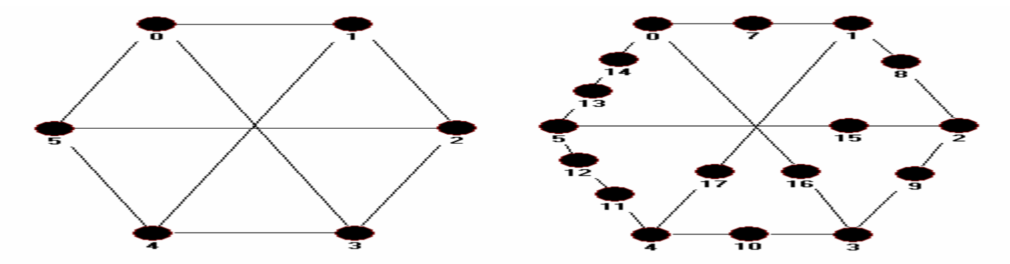
iii) G é sem *ciclos* e a adição de uma aresta cria um *ciclo* único;

iv) Todo par de vértices de G é unido por um único caminho.

Uma *árvore geradora* de G é um subgrafo gerador de G que é conexo e acíclico.

Segundo Wang e Zang [75], um grafo $P(G)$ é dito *purificado* se resulta de um grafo $G(n,m)$, com n vértices e m arestas, pela substituição de cada *caminho disjunto por arestas* por uma única aresta, onde os vértices terminais têm grau no mínimo 3 e cada vértice intermediário tem grau 2.

O grafo $P(G)$, veja Figura 2.2(a), resultante da substituição de cada caminho disjunto por arestas em $G(17, 20)$, veja Figura 2.2(b), por uma aresta.



(a) Grafo Purificado $P(G)$ (b) Grafo $G(17, 20)$.

Figura 2.2: Grafo Purificado $P(G)$ em (a) obtido de $G(17, 20)$ dado em (b).

A *conectividade de vértice*, $k(G)$, ou simplesmente k, é o menor número de vértices de G cuja remoção desconecta o grafo G ou o torna trivial. A *conectividade de arestas*, $\lambda(G)$, ou simplesmente λ, é o menor número de arestas cuja remoção desconecta

G. Se $k(G) = 0$ ou $\lambda(G) = 0$, G é um *grafo trivial* ou é desconexo e, caso $k(G) \geq p$, o grafo G é dito ser *p-conexo*.

Um *corte de arestas* em um grafo $G= (V, E)$, também chamado *conjunto separador de G*, é um conjunto de arestas cuja remoção resulta em um grafo desconexo. Uma definição semelhante se dá para *corte de vértices* de G. É fácil ver que todo subconjunto próprio e não vazio U constituído por todas as arestas que ligam um vértice de U a um outro de V-U determina um corte de arestas que é denotado por $[U, V\text{-}U]$. Se uma única aresta determinar um corte, ela é chamada de *ponte.* Definição análoga é dada para *ponto de articulação,* ou seja, é um único vértice que determina um corte de vértices em G. Um *corte de arestas* com cardinalidade $\lambda + 1$ é chamado *quase independente*, se *ele* contiver, no mínimo, λ arestas independentes em G. Um conjunto S de arestas é de *corte restrito* se $G – S$ é um grafo desconexo sem vértices isolados. A *conectividade restrita de aresta*, denotada por λ', é o tamanho do menor corte restrito em G. A princípio, pode-se pensar que um conjunto de corte não trivial é necessariamente um corte restrito. Porém, suponha que se tenha um corte S que separa G em três partes, dentre as quais, duas são vértices isolados. Assim, S não é um conjunto de corte trivial e nem é um conjunto de corte restrito.

Além dos parâmetros clássicos k(G) e $\lambda(G)$ utilizados como medidas de vulnerabilidade, um outro parâmetro é definido com este fim. Trata-se de $m_i(G)$, dado pelo número de conjuntos de corte de arestas com cardinalidade i. Quando $i=\lambda$, denotamos $m_i(G)$, simplesmente por m_λ . Neste caso, ele designa a quantidade de conjuntos de corte de arestas de cardinalidade exatamente igual à conectividade de arestas do grafo.

Seja $G = (V, E)$ um grafo e $I \subset V$ um subconjunto de vértices. Diz-se que I é *um conjunto independente* de G se, para todo par v_i, $v_j \in V$, v_i e v_j não são adjacentes. Um conjunto I_0 é um conjunto *independente maximal* de G se, para todo *conjunto independente* I de G, $|I_0| \geq |I|$. A cardinalidade do *conjunto independente maximal* de G é denominado *número de independênci*a de G e é denotado por $\alpha(G)$.

No grafo da Figura 2.3, os vértices 1, 4, 5 formam um conjunto independente de G, enquanto {1, 4, 5, 6} é um conjunto independente maximal de G. Neste grafo tem-se que o conjunto independente de G com a cardinalidade máxima é S_0 = {1, 4, 5, 6}. Conseqüentemente $\alpha(G) = 4$.

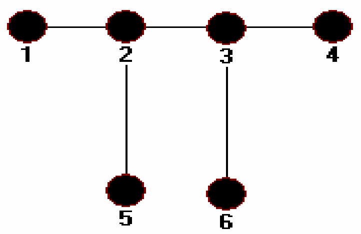


Figura 2.3: Grafo G com número de independência igual a 4.

Há inúmeros resultados envolvendo $k(G)$ e $\lambda(G)$ e relacionando-os com o grau mínimo de G, $\delta(G)$. A desigualdade $k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$, apresentada por Harary [39] é clássica na literatura e tem esses limites como os melhores possíveis, uma vez que existem grafos que satisfazem aquelas inequações na igualdade.

Ao se pensar numa rede como um grafo, quanto maior a conectividade de vértices e arestas, esta será menos propensa a se desconectar, Bondy e Murty [21]. Portanto, o problema de encontrar um grafo com máxima conectividade de vértices e arestas, para n e m fixos é de grande interesse para o estudo de vulnerabilidade e, conseqüentemente, da confiabilidade de redes. Este problema foi resolvido por Harary [39], com o Teorema 2.1.1 dado a seguir, cujos detalhes sobre os grafos que obedecem as condições por ele exigidas são apresentados nas próximas seções deste capítulo.

Teorema 2.1.1: Dentre todos os grafos com n vértices e m arestas, a conectividade máxima de arestas é igual à conectividade máxima de vértices e, ambas são iguais a 0, quando $m < n$ -1 e iguais a $\lfloor \frac{2m}{n} \rfloor$, quando $m \geq n$ -1. Recorre que se G é máximo em $\lambda(G)$, então $\lambda(G) = \delta(G)$.

2.2 Grafos de Harary

Os grafos de Harary são de grande interesse no estudo de confiabilidade por apresentarem valores máximos para as conectividades de vértice e de aresta e ainda por serem esses valores de fácil determinação. Nesta seção, estes grafos são definidos e resultados da literatura são apresentados; uma classificação é dada para os diferentes grafos de Harary em função da seqüência de graus de seus vértices e um algoritmo de construção para tais grafos é apresentado.

Geralmente, ao se modelar uma rede como um grafo, quanto maior a conectividade de vértice e aresta, menos propensa a falhas estará esta rede. Naturalmente, quanto menor o número de arestas usadas para atingir tal conectividade, menor será o custo desta rede. Harary [41] desenvolveu um procedimento para construir um grafo k-conexo com n vértices e $\lceil \frac{kn}{2} \rceil$ arestas, conhecido como grafo de Harary. Eles são extremais em relação ao número mínimo de arestas de modo que a conectividade de vértice é igual à conectividade de aresta que, por sua vez, são iguais ao grau mínimo que vale $\lfloor \frac{2m}{n} \rfloor$. Para maiores detalhes, veja [36] e [48].

Gross e Yeleen [36] apresentam um algoritmo para a construção de um grafo de Harary, $H(n, m)$, cujos dados de entrada são: um ciclo com n vértices, numerados de 0 a n-1 e um valor especificado para $k < n$. O algoritmo, a seguir apresentado, começa com o grafo trivial $H_0 = (V, E)$, onde E é o conjunto vazio e $V = \{1,..., n\}$. A distância entre dois vértices i e j em módulo n, denotada por $|j - i|_n$, é tomada como o menor entre um os dois valores $|j - i|_n$ ou $n - |j - i|_n$.

Algoritmo 2.2.1: construção de um grafo de Harary com *n* vértices

Entrada: são dados n e $k \in$, $k < n$ e $H = (V, E)$ o grafo trivial.

1 – Inicie com o grafo trivial H com n vértices isolados e numerados, no sentido horário, de 0 a n-1.

2 – Faça

$$q = \lfloor k/2 \rfloor.$$

3 – Para $i = 0,..., n$-2,

Para $j = i + 1,..., n$-1;

se $|j - i|_n \leq q$ ou $n - |j - i|_n \leq q$ então $E \leftarrow E \cup \{(i, j)\}$.

se k é par

Retorne ao grafo H.

Se não

4 – Se k ímpar e n par, então:

Para $i = 0,..., n/2 - 1$,

insira uma aresta entre o vértice i e o vértice $(i + n/2)$.

se n é par, retorne ao grafo H.

Se não

5 – Se k e n são ímpares, então:

insira uma aresta entre o vértice 0 e o vértice $(n - 1) / 2$;

insira uma aresta entre o vértice 0 e o vértice $(n + 1) / 2$;

para $i = 1,..., (n$-$3) / 2$,

insira uma aresta entre o vértice i e o vértice $[i + (n+1) / 2]$.

Retorne ao grafo H.

O grafo resultante do algoritmo no passo 3 é $2q$-regular e se k é par, o algoritmo é finalizado nesse passo. No passo 4, é construído um grafo de Harary regular com grau $2q + 1$ e o algoritmo é encerrado, caso n seja par. No caso que k e n sejam ímpares, o executante deve seguir para o passo 5 e o grafo obtido é não-regular. A seguir, dois exemplos de execução do algoritmo são apresentados passo a passo.

Exemplo 2.2.1: Sejam $n = 7$ e $k = 4$. Da atribuição inicial do algoritmo, numeramos os vértices de 0 a 6, no sentido horário. Do passo 2, $q = 2$. Em seguida, tomando-se $i = 0$ e $j = 1$ e dado que $|1 - 0|_n \leq q$, a aresta $\{0, 1\}$ é inserida em H. E assim, este passo é repetido, sucessivamente, para todos os valores de i e j que atenderem uma das condições do passo 3. O grafo resultante se encontra na Figura 2.4.

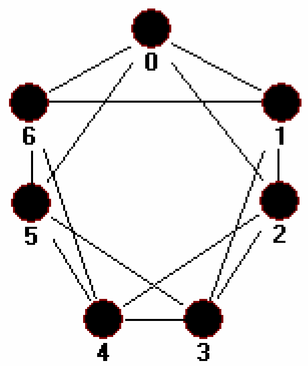


Figura 2.4: Grafo de Harary construído pelo Algoritmo 2.1.1

Exemplo 2.2.2: Sejam $n = 9$ e $\delta = 5$. Do passo 1, os vértices são numerados de 0 a 8. O procedimento se desenvolve como no caso anterior, a exceção que aqui, o passo 5 é acionado, pois n e δ são ímpares. Assim, uma aresta é inserida entre os vértices 0 e 4 e outra, entre os vértices 0 e 5. Para $i = 1, 2, 3$, com a inserção das arestas $\{1, 6\}$; $\{2, 7\}$ e $\{3, 8\}$, tem-se o grafo desejado na Figura 2.5.

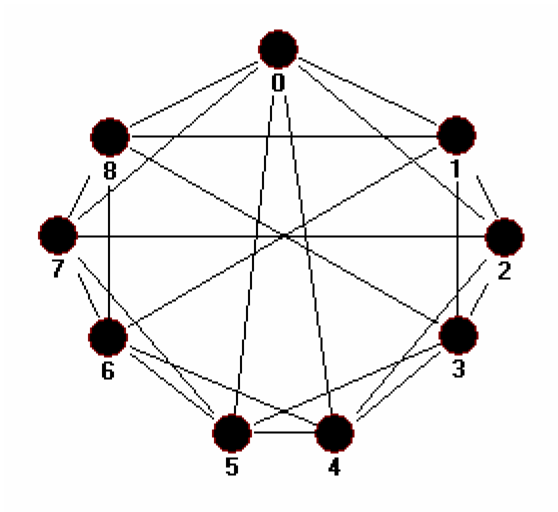
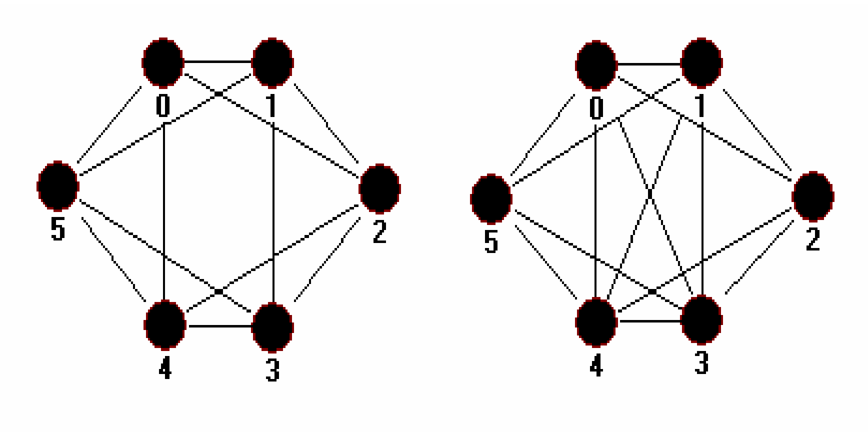


Figura 2.5: Grafo de Harary construído pelo Algoritmo 2.1.1

Os grafos de Harary são exemplos de grafos com máxima conectividade dentre aqueles com o menor número de arestas. Portanto, pode-se afirmar que para alguns valores de *n, m* tais grafos não existem. A partir desta observação, para $q = \lfloor \frac{m}{n} \rfloor$, Bauer *et al.*[9] classificaram os grafos de Harary em duas categorias: a dos *Grafos Elementares de Harary*, construídos de acordo com o procedimento de Harary [41], divididos em dois tipos, $H_0(q)$ e $H_1(q)$, e a dos *Grafos Gerais de Harary*. A construção destes últimos foi feita por Bauer *et al.* [9], seguidos por Wang e Zhang [75] e Deng *et al.* [27]. A construção parte da equação $2m = \delta n + r$, para dados n e m. Tem-se então $r \in Z,\ 0 \leq r < n$, tal que $m > n$. O grafo geral de Harary $H'(n,m)$ é formado a partir de um grafo $H_0(q)$ ou de um grafo $H_1(q)$, onde são conectados $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ pares de vértices não adjacentes. Desta forma, todo grafo Geral de Harary tem como subgrafo gerador um grafo elementar. Se δ é par, a inserção é feita num grafo do tipo $H_0(\frac{\delta}{2})$ e, se δ é ímpar, num grafo elementar de Harary do tipo $H_1(\frac{\delta}{2})$. Dado que $r < n$, ao adicionarmos no máximo $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ arestas a $H_0(\frac{\delta}{2})$ ou a $H_1(\frac{\delta}{2})$, o valor do grau mínimo não mudará e $H'(n,m)$ terá $\delta(H) = \delta(H_0(\frac{\delta}{2}))$ ou $\delta(H) = \delta(H_1(\frac{\delta}{2}))$.

Exemplo 2.2.3: Deseja-se construir um grafo H com 6 vértices, 14 arestas e com máxima conectividade de arestas. Pelo Teorema 2.1.1, sabemos que este grafo possui $k = \delta = \lambda = 4$. Neste caso, tem-se $r = 4$. O grafo geral de Harary, Figura 2.6 (b), foi construído pela inserção aleatória de 2 arestas no grafo $H_0(2)$, Figura 2.6 (a).



(a) (b)

Figura 2.6: Grafo geral de Harary em (b) construído a partir do elementar em (a)

De acordo com Bauer *et al.* [9], a seqüência de graus, o grau mínimo, a conectividade de arestas e a conectividade de vértices dos grafos Elementares de Harary são assim distribuídas:

i) Todo grafo $H_0(q)$ é regular de grau $2q$;

ii) Se n é par, todo grafo $H_1(q)$ é regular de grau $2q + 1$ e, se n é ímpar, todo grafo $H_1(q)$ tem um vértice de grau $2q + 2$ e $n - 1$ vértices de grau $2q + 1$;

iii) Qualquer grafo $H_0(q)$ ou $H_1(q)$, tem $m = \lfloor \frac{\delta n}{2} \rfloor$ e $\delta = \lambda = k = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor$.

Pode-se afirmar que o grafo $H_0(q)$ possui $2m = \delta n = 2qn$ e o grafo $H_1(q)$ possui $2m = \delta n = (2q+1)n$, se n é par e $2m = \delta n + 1 = (2q+1)n +1$, se n é ímpar.

Lima [49], em sua tese de doutorado, estende os resultados de Bauer *et al.* [9], a partir do Algoritmo de Hakimi, e obtém uma classificação para os Grafos Gerais de Harary dividindo-os em 2 tipos: $H_2(q)$ e $H_3(q)$. Estes são caracterizados de acordo com o lema abaixo.

Lema 2.2.1: Seja H um grafo de Harary com n vértices e m arestas, $m = qn + r$, $0 \leq r \leq n - 1$ e $q = \lfloor \frac{m}{n} \rfloor$. Assim, tem-se que:

i) Para $0 < r < \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, se em H há $2r$ vértices de grau $\Delta(H) = 2q + 1$, tendo todos os demais, grau $\delta(H) = 2q$, o grafo é do tipo $H_2(q)$:

ii) Para $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor < r \leq n - 1$, se H tem $\delta(H) = 2q + 1$ e o grau máximo $\Delta(H)$ no intervalo $\delta(H) + 1 \leq \Delta(H) \leq \delta(H) + r - \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, o grafo é do tipo $H_3(q)$.

2.3 Algoritmo de Hakimi

De acordo com Lima [49], Hakimi [38] desenvolveu um algoritmo baseado no trabalho de Harary que constrói grafos G que satisfazem à igualdade $k(G) = \lambda(G) = \delta(G) = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor$. Inicialmente o procedimento de Hakimi [38] rotula de 1 a n os vértices de um grafo G, conexo e não-completo, e admite que $n \leq m < \lfloor \frac{n(n-1)}{2} \rfloor$. O procedimento baseia-se na divisão do algoritmo de Euclides, onde é realizada a divisão do número de arestas de G pelo número de vértices, ou seja, $m = qn + r$, onde $r < n$. Também considera que as distâncias entre os vértices i e j, em módulo n, denotada por $|j - i|_n$, é tomada como o menor entre os dois valores $|j - i|_n$ ou $n - |j - i|_n$. O objetivo é distribuir as arestas pelos vértices o mais igualitariamente possível.

Algoritmo 2.3.1: Algoritmo de Hakimi

Entrada: n e $m \in \mathbb{N}$, $k < n$ e $G = (V, E)$ o grafo trivial, isto é, $V = \{1,..., n\}$ e $E = \varnothing$.

1 – Faça

$$q \leftarrow \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor;$$

$$r \leftarrow m - qn;$$

2 – Para $p = 1,..., q$

Para $i = 1,..., n$-1

Para $j = i + 1,..., n$

se $\left|(j-i)\right|_n \leq p$ ou $n - \left|(j-i)\right|_n \leq p$ então

$E \leftarrow E \; U \; \{(i, j)\}$.

3 – Faça $s \leftarrow \min\left\{r, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right\}$;

Para $i = 1,..., s$,

tome $j = i + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ e

$E \leftarrow E \; U \; \{(i, j)\}$.

4 – Se $r > s$ então

Conecte de modo aleatório (r-s) pares de vértices não adjacentes no grafo corrente.

A seqüência de graus, o grau mínimo, a conectividade de arestas e a conectividade de vértices desses grafos são distribuídas de acordo com o lema abaixo, cuja prova pode ser encontrada em Lima [49].

Lema 2.3.1: Os grafos construídos pelo Algoritmo de Hakimi possuem as seguintes características:

i) Se $r = 0$, G é $2q$-regular;

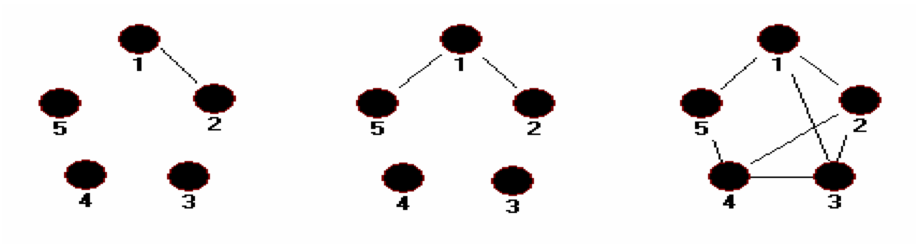
ii) Se n é par e $r = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, o grafo G é $(2q + 1)$ - regular; se n é ímpar, existem $n - 1$ vértices com grau mínimo igual a $2q + 1$ e somente um vértice com grau $2q + 2$;

iii) Se $0 < r < \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, o grafo G tem $2r$ vértices com grau $2q + 1$ e $n - 2r$ vértices com grau $2q$;

iv) Se $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor < r < n - 1$, G tem grau mínimo igual a $\delta(G) = 2q + 1$ e grau máximo no intervalo $\delta(G) + 1 \leq \Delta(G) \leq \delta(G) + r - \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.

Observe que os grafos do item (i) são exatamente os grafos elementares de Harary do tipo $H_0(q)$ e aqueles do item (ii) são os grafos $H_1(q)$. Os grafos dos itens (iii) e (iv) são, respectivamente, os grafos gerais de Harary do tipo $H_2(q)$ e do tipo $H_3(q)$.

Exemplo 2.3.1: Considere $n = 5$ e $m = 7$. Do passo 1, $q = 1$, $r = 2$ e $p = 1$. No passo 2, se $i = 1$ e $j = 2$, $\{1, 2\}$ é uma aresta de G dado que $|j - i|_n \leq 1$. O grafo corrente está na Figura 2.7(a). Se $i = 1$, $j = 3$ ou $j = 4$, não haverá aresta entre i e j dado que a condição de congruência não é satisfeita, enquanto que para $j = 5$, a aresta $\{1, 5\}$ é inserida a G. Veja a Figura 2.7(b). De modo semelhante as arestas $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$ e $\{4, 5\}$ são inseridas. As arestas $\{1, 3\}$ e $\{2, 4\}$ são finalmente inseridas ao grafo corrente obedecendo a relação $j = i + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ para $s = 2$. Assim, chega-se ao grafo da Figura 2.7(c).



(a) (b) (c)

Figura 2.7: Construção do grafo com $n = 5$ e $m = 7$ pelo algoritmo de Hakimi

2.4 Comparação entre os grafos de Harary e os de Hakimi

Comparando-se o algoritmo de Hakimi com o Algoritmo 2.1.1, apresentado por Gross e Yellen [36], a partir dos procedimentos de Harary e daquele descrito por Bauer *et al.* [9], Wang e Zhang [75] e Deng *et al.* [27] que constrói Grafos Gerais de Harary, pode-se concluir que:

i) O algoritmo de Hakimi tem como dados de entrada o número de vértices e arestas e o Algoritmo 2.2.1 têm como dados de entrada o número de vértices e a conectividade de vértices;

ii) Os procedimentos de Harary e de Hakimi têm a seguinte característica em comum: os grafos são construídos a partir de um n-ciclo, onde são introduzidas cordas de acordo com as particularidades de cada procedimento.

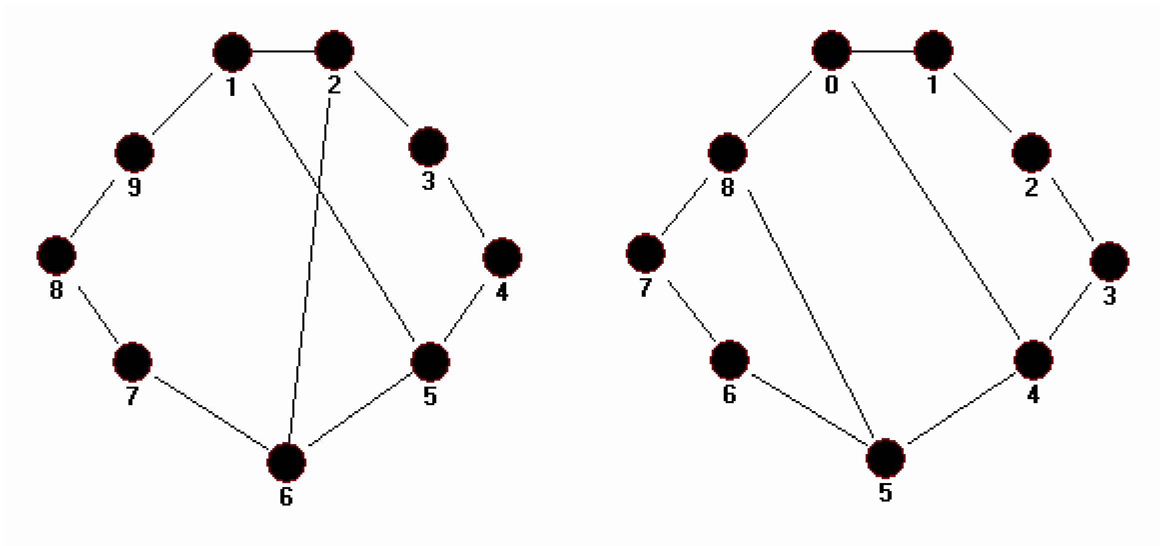
iii) O Algoritmo 2.2.1 constrói apenas os grafos $H_0(q)$ e $H_1(q)$, enquanto o algoritmo de Hakimi é capaz de construir os grafos elementares e os gerais de Harary;

iv) Os Algoritmos 2.2.1 e o de Hakimi constroem grafos do tipo $H_0(q)$ idênticos. A mesma observação é válida para os grafos do tipo $H_1(q)$, exceto no caso em que este grafo não é regular. Veja o passo 5 do Algoritmo 2.2.1.

v) De acordo com o procedimento descrito por Bauer *et al.* [9], os grafos gerais de Harary $H_2(q)$ e $H_3(q)$ são formados a partir da conexão aleatória de $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ pares de vértices não adjacentes em um grafo elementar de Harary do tipo $H_0(q)$ ou $H_1(q)$. No algoritmo de Hakimi esta aleatoriedade só ocorre na construção do grafo $H_3(q)$, pois, este grafo é construído no passo 4 do algoritmo, onde são conectados $(r - s)$ pares de vértices não adjacentes no grafo corrente, veja Lima [49].

vi) Os grafos construídos, segundo o procedimento de Harary, podem ser completos e aqueles construídos, segundo o algoritmo de Hakimi não, pois este algoritmo exige que $n \leq m < \lfloor \frac{n(n-1)}{2} \rfloor$;

viii) No caso do grafo $H_2(q)$, o algoritmo de Hakimi define o posicionamento das arestas restantes, enquanto no procedimento descrito por Bauer *et al.* [9] isto é feito de forma aleatória. A Figura 2.8 apresenta dois grafos $H_2(q)$ com 9 vértices e 11 arestas. O grafo da Figura 2.8 (a) foi construído segundo o algoritmo de Hakimi e o da Figura 2.8 (b), segundo o procedimento de Bauer *et al.* [9]. Neste exemplo, a inserção das últimas 2 arestas do grafo em (b) foi feita de modo aleatório gerando um grafo diferente do que está em (a). Entretanto, este fato não altera as conectividades de vértice e aresta.



(a) (b)

Figura 2.8: Grafos Gerais de Harary $H_2(q)$ construídos segundo o Algoritmo de Hakimi em (a) e segundo o procedimento de Bauer *et al* em (b).

ix) Finalmente, no procedimento de Bauer *et al.* [9], os valores de n e m são conhecidos tal que $m > n$, onde $2m = \delta n + r$, onde $r \in Z$, $0 \le r < n$, e a construção dos grafos $H_2(q)$ e $H_3(q)$ é feita com a conexão aleatória de $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ vértices de um grafo $H_2(q)$ e $H_3(q)$. O procedimento de Hakimi baseia-se na divisão do algoritmo de Euclides, onde é realizada a divisão do número de arestas de G pelo número de vértices, ou seja, $m = qn + r$. Neste caso, r é apenas o valor da subtração de $m - qn$. No exemplo da Figura 2.8 (a), temos que $r = 2$.

Os dois procedimentos descritos acima constroem grafos extremais em relação à conectividade de vértice e de aresta. Porém, esta condição ainda não é suficiente para afirmarmos que os grafos construídos modelam as redes com a menor probabilidade de falha, ou seja, as mais confiáveis. Podemos apenas afirmar que estes grafos são os menos vulneráveis possíveis em relação às conectividades de vértice e aresta. Ao longo deste estudo, analisaremos tais condições. Além disso, pode não ser possível modelar redes confiáveis usando estes grafos, isto será explicitado quando esta particularidade ocorrer.

Esta dissertação não distingüe os grafos de Harary de acordo com a classificação feita por Bauer *et al.* [9] em *g*rafos *e*lementares e *g*erais de Harary. Estes grafos são chamados apenas por grafos de Harary e diferenciados pelos respectivos tipos, $H_0(q)$, $H_1(q)$, $H_2(q)$ e $H_3(q)$.

Capítulo 3

Redes confiáveis

Os vértices de um grafo podem representar os terminais de uma rede e suas arestas o meio físico de comunicação entre eles. Para uma rede estar em funcionamento, todo par de vértices deve estar conectado por pelo menos um caminho.

Seja $K \subseteq V$ um subconjunto de vértices de um grafo $G = (V, E)$ que modelam os terminais de uma rede. Suponha que inicialmente todos os terminais se comunicam entre si. A confiabilidade entre K terminais (*K-terminal reliability*) é a probabilidade de qualquer par de terminais pertencentes a K estar em funcionamento, mesmo após alguma falha ocorrida na rede, ou seja, é a probabilidade destes K vértices estarem conectados por pelo menos um caminho, após a falha de algum subconjunto de arestas da rede. Se $K = V$ e todos os vértices do grafo estão em funcionamento, a confiabilidade entre todos os terminais (*all-terminal reliability*) é definida como a probabilidade do grafo permanecer conexo mesmo após a falha de um subconjunto de suas arestas. Suponha que $K = 2$ e que um terminal u esteja em funcionamento com um terminal v. Portanto, deve existir pelo menos um caminho conectando estes terminais. A confiabilidade entre 2 terminais (*two-terminal reliability*) é definida como a probabilidade dos vértices u e v permanecerem conexos após a falha de algumas arestas da rede.

Nesta dissertação, uma rede é modelada por um grafo não-orientado com n vértices e m arestas, onde quaisquer pares de vértices estão em funcionamento. Este é o caso da confiabilidade entre todos os terminais (*all-terminal reliability*) e, por ser o caso mais abrangente e mais adequado para redes de um mundo real, foi o escolhido como nosso objeto de estudo.

Supondo que cada vértice é perfeitamente confiável e que suas arestas são duas a duas independentes entre si, tendo cada uma delas a mesma probabilidade de falha ρ, é possível determinar a probabilidade de um grafo permanecer conexo, calculando-se ou o valor da função de confiabilidade dada em (3.1), ou de sua respectiva dual, a função de não confiabilidade, dada em (3.2), ambas definidas por Kelmans [45].

. A *função de confiabilidade* $R(G,\rho)$, denotada mais simplesmente por *R*, que dá probabilidade do grafo permanecer conexo mesmo após a falha de algumas de suas arestas, pode então ser definida por:

$$R(G,\rho) = \sum_{i=n-1}^{m} S_i (1-\rho)^i \rho^{m-i}, \tag{3.1}$$

onde S_i denota o número de subgrafos geradores conexos contendo *i* arestas.

A fórmula (3.1) para o cálculo de confiabilidade é obtida a partir das seguintes considerações: A *i*-ésima parcela da fórmula (3.1) dá a probabilidade de exatamente *i* arestas não falharem, ou equivalentemente, *m*-*i* arestas falharem. Além disso, para que o grafo se mantenha conexo, é necessário que, dentre todas as *m* arestas, pelo menos *n* -1 não possam falhar. Para $i = n$ -1,..., *m*, há várias possibilidades para remoção de $m - i$ arestas sem desconectar o grafo e o número de possibilidades é conhecido quando se determina a quantidade de todos os subgrafos geradores conexos contendo *i* arestas, dada por S_i. Se $i = m$, $S_m = 1$, pois o único subgrafo gerador com *m* arestas é o próprio grafo; quando $i = n$-1, S_{n-1} é a quantidade de árvores geradoras do grafo, que para ser determinado, é preciso que se conheça ou a estrutura do grafo ou alguma informação a mais sobre ele. Há uma conhecida fórmula algébrica que dá o número de árvores geradoras de um grafo, que depende dos autovalores da matriz Laplaciana do grafo, veja Biggs [13]. Desta forma, o intervalo fechado de inteiros entre *n* -1 e *m* é suficiente para o cálculo de $R(G,\rho)$, como dado em (3.1), que é similar a uma distribuição binomial.

Usando o raciocínio dual, pode-se medir a confiabilidade de uma rede pela *função de não confiabilidade*, ou seja, pelo cálculo da probabilidade do grafo se tornar desconexo após a falha de algumas de suas arestas. Assim temos:

$$P(G,\rho) = \sum_{i=\lambda}^{m} m_i(1-\rho)^i \rho^{m-i}, \tag{3.2}$$

onde $\lambda(G)$ ou, simplesmente λ, é a conectividade de arestas e $m_i(G)$ ou, simplesmente m_i, é o número de conjuntos de corte de arestas com cardinalidade exatamente igual a i.

Uma discussão similar àquela dada para a expressão (3.1) da *função de confiabilidade* serve para interpretar a expressão (3.2) relativa à *função de não-confiabilidade*. Note apenas que, no segundo caso, o valor mínimo para i deve ser igual a λ, já que a remoção de um número menor de arestas não desconecta o grafo.

A diferença entre as expressões (3.1) e (3.2) consiste em que na primeira, o número de subgrafos geradores conexos deve ser conhecido. Para isso, para que uma rede seja confiável, grafos que maximizem este número precisam ser encontrados. Já, para a segunda fórmula, deve-se conhecer a quantidade de conjuntos de corte de arestas com cardinalidade igual a i, ou seja, é preciso saber quantos são os subgrafos geradores desconexos de G com $m - i$ arestas. Portanto, para se determinar uma rede considerada confiável, deve-se minimizar m_i e maximizar λ.

É lógico que ambos os raciocínios descritos acima, nos levam ao óbvio resultado dado pela propriedade complementar das probabilidades dadas por (3.1) e (3.2), ou seja, $R(G,\rho) = 1 - P(G,\rho)$.

Como exemplo, veja o grafo G com $n = 5$ vértices, $m = 6$ arestas e $\lambda = 2$, ilustrado no canto superior esquerdo da Figura 3.1(a). A partir dele, são exibidos todos os subgrafos geradores conexos. Para $i = 4$, 5 e 6, temos todos os valores de S_i, sendo

S_4 = 11 o número de árvores geradoras com 4 arestas e S_5 = 6 o total de subgrafos geradores com 5 arestas que, neste caso, são grafos unicíclicos. Finalmente, S_6 = 1.

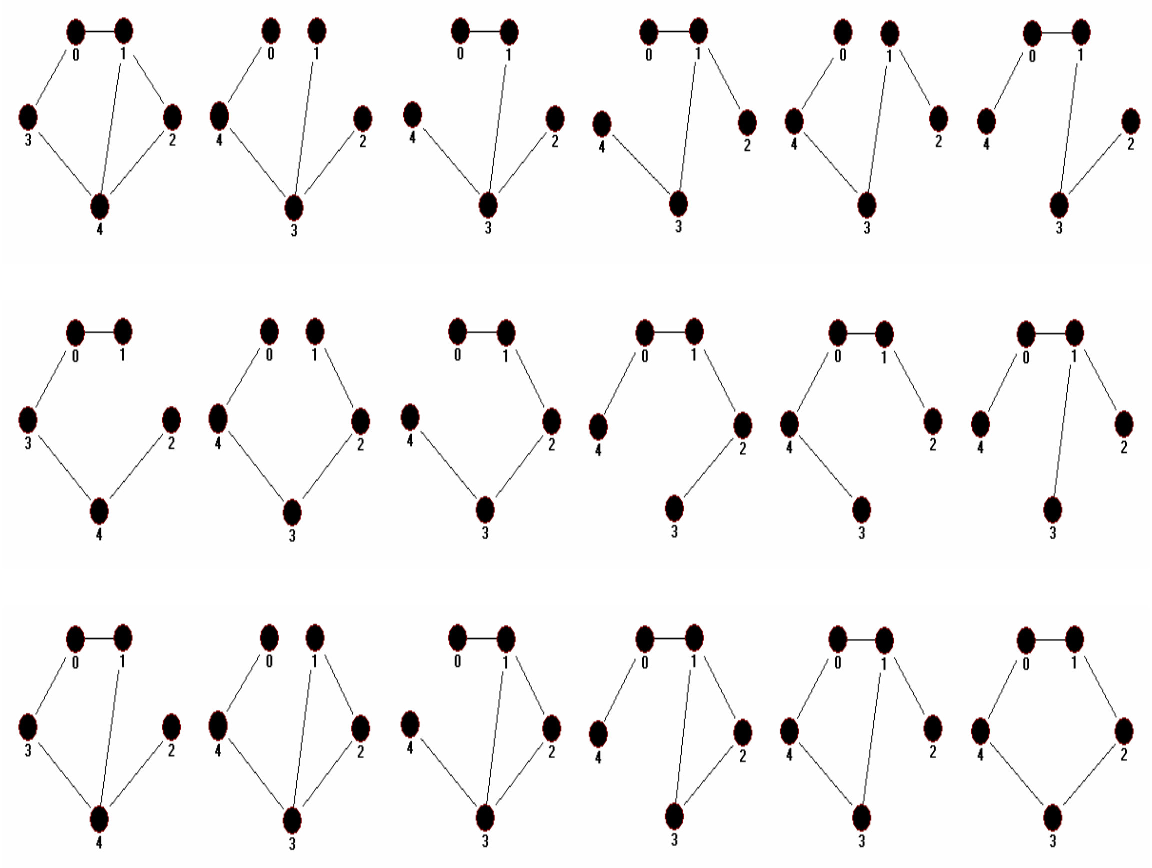


Figura 3.1(a) – O Grafo G(5, 6) e todos os seus subgrafos geradores.

A Figura 3.1(b) exibe todos os subgrafos desconexos derivados dos m_2 = 4 conjuntos de corte de arestas possíveis.

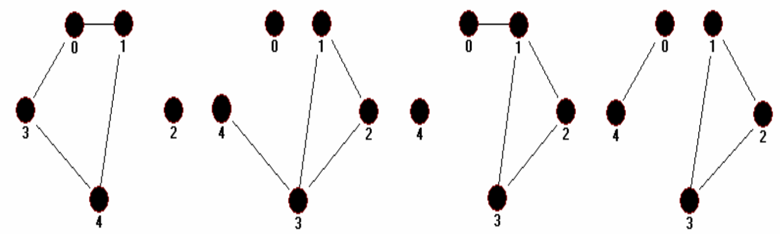
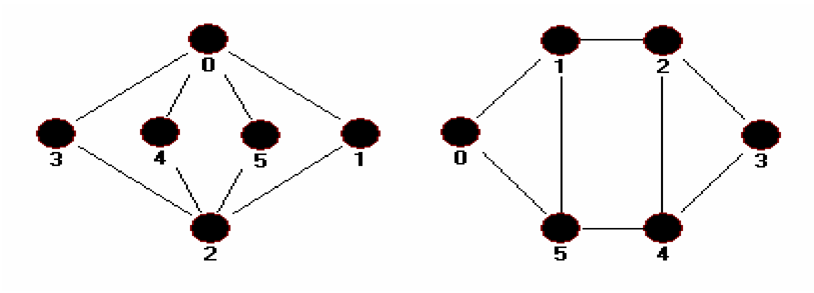


Figura 3.1(b) – Subgrafos geradores desconexos de G(5, 6) dados pelos conjuntos de corte de cardinalidade 2.



(a) (b)

Figura 3.2: Grafos com 6 vértices e 8 arestas

Para os grafos (a) e (b) mostrados na Figura 3.2, as probabilidades de que cada um deles se torne desconexos dada por (3.2) são explicitadas da seguinte maneira:

$P(G_a, \rho) = 4\rho^2(1-\rho)^6 + 24\rho^3(1-\rho)^5 + \sum_{i=4}^{8} \binom{m}{i} \rho^i (1-\rho)^{8-i}$ e;

$P(G_b, \rho) = 3\rho^2(1-\rho)^6 + 26\rho^3(1-\rho)^5 + \sum_{i=4}^{8} \binom{m}{i} \rho^i (1-\rho)^{8-i}$.

Observando-se cada uma das funções acima, verifica-se que para se decidir sobre a confiabilidade dos dois grafos, ambos com o mesmo número de vértices (no caso, 6) e o mesmo número de arestas (no caso, 8), é necessário que o valor de ρ seja conhecido.

Note que $P(G_a, \rho) - P(G_b, \rho) = \rho^2(1-\rho)^5(1-3\rho)$. Desta forma, a Tabela 3.1 sintetiza os intervalos de valores para ρ e mostra os efeitos sobre a confiabilidade dos grafos da Figura 3.2.

Tabela 3.1: Comparação entre as confiabilidades dos grafos da Figura 3.2 para diferentes valores de ρ.

Intervalo de ρ	**Comparação entre as confiabilidades**
se $0 < \rho < 1/3$	$P(G_a, \rho) > P(G_b, \rho)$
se $\rho = 1/3$	$P(G_a, \rho) = P(G_b, \rho)$
se $1/3 < \rho < 1$	$P(G_a, \rho) < P(G_b, \rho)$

A partir daí, pode-se concluir que a confiabilidade de uma rede depende tanto da estrutura do grafo quanto da probabilidade ρ de falha de cada uma de suas arestas. Por outro lado, em $G(n, m)$, pode existir um grafo G' tal que, para todo ρ, $0 \leq \rho \leq 1$, $P(G', \rho) \leq P(G, \rho)$. Os grafos assim existentes são conhecidos por *uniformemente mais confiáveis*, ou simplesmente por *UOR*, veja Boesch *et al.* [15]. A principal questão é saber se, para quaisquer valores de n e m, tais grafos existem. Myrvold e Cheung [53] mostraram que há pares (n, m), para os quais estes grafos não existem. Por outro lado, Boesch *et al.* [15] mostraram que é possível construir grafos uniformemente mais confiáveis, para $m = n - 1$, n, $n + 1$, $n + 2$, Wang [76] mostrou, ser isto possível, para $m = n + 3$. Posteriormente, Gross e Saccoman [35] ampliaram o resultado de Boesch *et al.* [15] e incluíram multigrafos em tais classes. A Tabela 3.2 apresenta, para dados valores de n, caracterizações de grafos *UOR*.

Tabela 3.2: Descrição de grafos *UOR*.

Números de arestas:	**Grafo *UOR***
n-1	Qualquer árvore
n	n-ciclo
$n + 2$	Formado pela inserção de n - 2 vértices de grau 2 nas arestas de $K_{4.}$
$n + 3$	Formado pela inserção de n - 6 vértices de grau 2 nas arestas de $K_{3,\,3.}$

A questão da existência de grafos *UOR* para quaisquer n e m ainda permanece aberta. Todavia, existe um pequeno intervalo de valores para ρ, $0 < \rho \leq \rho_0$, para o qual é possível encontrar uma família de grafos que minimizem $P(G,\rho)$ para quaisquer n e m dado.

Kelmans [45] observou que, exceto em alguns casos óbvios, para minimizar $P(G,\rho)$ é necessário determinar diferentes grafos para cada ρ. Além disso, ele observou que, se a probabilidade de falha de uma aresta ρ for suficientemente pequena, o cálculo de $P(G,\rho)$ poderia ser reduzido somente ao cálculo do primeiro termo da expressão (3.2), quando i é igual à conectividade de arestas λ. Neste caso, temos:

$$P(G,\rho) = m_\lambda \rho^\lambda (1-\rho)^{m-\lambda}. \qquad (3.3)$$

A aproximação dada em (3.3) é útil porque existem algoritmos eficientes para o cálculo de m_λ, veja Ball e Provan em [7]. Por outro lado, Ball e Provan [6] mostraram que o cálculo de m_i, para todo i, $\lambda \leq i \leq m$, é um problema *NP*-hard.

A Tabela 3.3 mostra o cálculo de m_i e de $m_i \rho^i (1-\rho)^{m-i}$ para o grafo da Figura 3.3 com ρ = 0,01 e $2 \leq i \leq 5$. Na última linha da tabela, a probabilidade do grafo ser desconectado é apresentado. Observe que os valores de $m_i \rho^i (1-\rho)^{m-i}$ diminuem, quando os de i aumentam. Isto mostra que os valores dados por $P(G, \rho)$ em (3.3) são uma aproximação para (3.2).

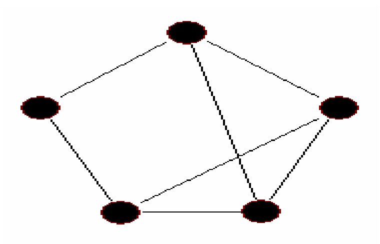


Figura 3.3: Grafo G com probabilidade de falha em cada aresta dada por ρ = 0,01.

Tabela 3.3: Cálculo da probabilidade de ocorrência de falha para *G* da Figura 3.3.

i	m_i	$m_i\rho^i(1-\rho)^{m-i}$
2	1	9,5099E-05
3	11	1,05666E-05
4	35	3,39605E-07
5	21	2,05821E-09
	$P(G,\rho)=\sum_{i=\lambda}^{m} m_i(1-\rho)^i\rho^{m-i}=0,00010600$	

Bauer *et al.* [10] fizeram um estudo detalhado sobre os possíveis valores de ρ no intervalo $0 < \rho \leq \rho_0$ para os quais existe uma família de grafos capaz de minimizar (3.3) tal que para qualquer grafo G' não pertencente a tal família tem-se, para $0 < \rho \leq \rho_0$, $P(G', \rho) > P(G, \rho)$. Logo, os grafos nesta família, conhecidos por *max* λ *& min* m_λ, devem possuir máxima conectividade de arestas e mínima quantidade de cortes de arestas com cardinalidade igual a λ.

Até agora aprendemos a construir grafos da classe $G_\lambda(n,m)$, aqueles com n vértices, m arestas e máxima conectividade de arestas λ. Porém, somente esta condição não é suficiente para minimizar $P(G,\rho)$. É necessário determinar grafos *min* m_λ no conjunto $G_\lambda(n,m)$. Nos capítulos seguintes, para uma pequena probabilidade de falha ρ e para uma dada conectividade de aresta, são descritos os procedimentos para construir tais grafos. Isto será feito em duas partes. Primeiro, para o caso em que $\lambda = \frac{2m}{n} \geq 3$, depois para o caso particular em que $\lambda = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor = 2$. Este segundo caso precisa ser analisado com mais cuidado, pois nele haverá necessariamente um ou mais vértices de grau 2. Isto pode fazer gerar um maior número de conjuntos de corte de aresta de cardinalidade 2 que a quantidade de cortes só decorrentes das arestas incidentes a vértices de grau mínimo. O Capítulo 4 tratará do primeiro caso e o Capítulo 5, do segundo caso.

Capítulo 4

Grafos *max λ & min m_λ* quando $\frac{2m}{n} \geq 3$

Este capítulo é dedicado às famílias de grafos confiáveis para $\lambda \geq 3$. Conforme Bauer *et al.* [9] e [10], tais grafos devem ter probabilidade $P(G,\rho)$ mínima para ser desconectado. Dois parâmetros têm impacto direto sobre o valor de $P(G, \rho)$. O primeiro, é a conectividade de arestas λ e o segundo, a quantidade de conjuntos de corte de arestas de cardinalidade exatamente igual a λ. Assim, desejamos encontrar em $G(n,m)$, a subclasse $G_\lambda(n,m)$ formada por todos os grafos, conhecidos como *max λ*, que possuam máxima conectividade de aresta. Em seguida, dentre todos os grafos com *m* arestas, *n* vértices e conectividade $\lambda = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor$, devemos encontrar a família $G_{\lambda,m_\lambda}(n,m)$ $\subseteq G_\lambda(n,m)$ constituída somente pelos grafos com a menor quantidade m_λ de conjunto de cortes de arestas de cardinalidade igual a λ, chamados grafos *max λ & min m_λ* e denotados por G_{λ,m_λ}. A Figura 4.1 mostra a relação de inclusão entre estas famílias. Assim, quando $\frac{2m}{n} \geq 3$, apresentamos aqui a solução completa para o problema de construção de grafos com valor mínimo para m_λ e máximo para λ.

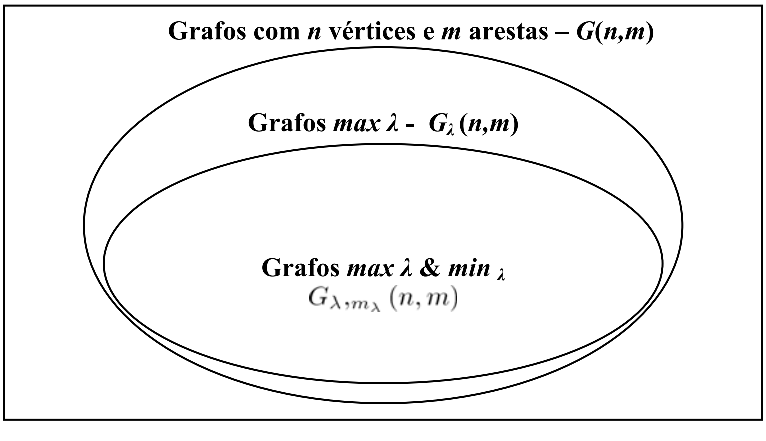


Figura 4.1: Cadeia de inclusão das classes de grafos com *n* vértices e *m* arestas

4.1 Grafos *super-λ*

Considere $G \in G_\lambda(n, m)$ um grafo com máxima conectividade de aresta λ e $p_\lambda(G)$ o número de vértices de grau mínimo em G. Dado que G tem máxima conectividade então $\delta(G) = \lambda(G)$. Como $m_\lambda(G)$ é o número de cortes de cardinalidade λ e sabendo-se que todo conjunto de arestas incidentes a um vértice de grau mínimo é um destes cortes, temos $m_\lambda(G) \geq p_\lambda(G)$. Dentre todos os grafos de $G_\lambda(n, m)$, o nosso objetivo é procurar um para o qual m_λ é o menor possível. Este grafo, como vimos, é um grafo *max λ & min* m_λ pertencente à classe $G_{\lambda, m_\lambda}(n, m)$. Sendo $p_\lambda(G)$ um limite inferior para $m_\lambda(G)$, o ideal seria que todo grafo em G_{λ, m_λ} pudesse estar entre aqueles para os quais todo conjunto de corte de cardinalidade λ fosse formado somente por arestas incidentes a vértices de grau mínimo. Mas isto nem sempre é possível, como decorre do lema a seguir.

Lema 4.1.1: Para $n > 4$, todo ciclo C_n tem $p_\lambda(G) = n$, $m_\lambda(G) = n\binom{n-3}{2} + n$.

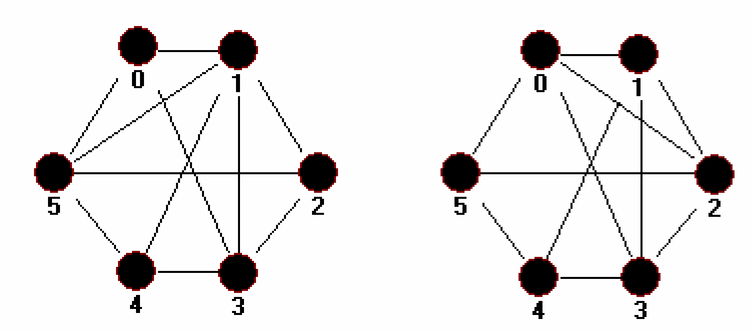
Prova: Sabemos que C_n tem $\lambda = 2$ e que todo vértice induz um corte trivial constituído por 2 arestas. Logo, $p_\lambda(G) = n$, valor que inclui os n cortes de cardinalidade 2 correspondentes à segunda parcela de $m_\lambda(G)$, como descrita no lema. Naturalmente, há mais cortes a considerar. São aqueles formados por pares de arestas paralelas que, para cada aresta, são em número de $\binom{n-3}{2}$. Como no ciclo há n arestas, temos $n\binom{n-3}{2}$ o número de cortes constituídos por tais arestas. Logo, $m_\lambda(G) = n\binom{n-3}{2} + n$. ■

Definição 4.1.1: Diz-se que $G \in G\,(n, m)$ é um *grafo super-λ* se G satisfaz as seguintes propriedades: (i) sua conectividade de aresta é $\lambda(G) = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor$ e (ii) o número de conjunto de cortes de arestas $m_\lambda(G)$ de ordem λ é igual ao número de vértices de grau λ, $m_\lambda(G) = p_\lambda(G)$.

Lema 4.1.2: Se G é um grafo *super-λ* e U é um conjunto de corte de ordem λ *então* U determina um corte trivial em G.

Prova: Se G é *super-λ,* da Definição 4.1.1, o número de cortes de aresta de cardinalidade de G é igual ao número de vértices de grau mínimo e este é igual a λ. Logo, todo conjunto unitário constituído por cada vértice de grau mínimo define um corte trivial com λ arestas. Assim, não há nenhum outro corte com esta cardinalidade. ■

Observação 4.1.1: Nem todo grafo *super-* λ é *max* λ *& min* m_λ. Embora um grafo G *super-λ* tenha $m_\lambda(G) = p_\lambda(G)$, é possível haver um outro grafo $G' \in G_\lambda(n, m)$, também *super-* λ, tal que $m_\lambda(G') = p_\lambda(G')$ e $m_\lambda(G') < m_\lambda(G)$. Embora ambos sejam *super-λ*, somente G' é *max* λ *& min* m_λ. Os grafos da Figura 4.2(a) e (b) são exemplos de grafos assim para $\lambda = 3$. O grafo da Figura 4.2(a) possui $m_\lambda = p_\lambda = 3$ e o da Figura 4.2(b), $m_\lambda = p_\lambda = 2$. Portanto, somente o segundo grafo é *max* λ *& min* m_λ.



(a) (b)

Figura 4.2: Os grafos (a) e (b) são exemplos de grafos *super-λ* com 6 vértices e 11 arestas, sendo que o grafo em (b) também é *max* λ *& min* m_λ.

A construção de grafos *max* λ *& min* m_λ, G_{λ,m_λ}, para os quais $\frac{2m}{n} \geq 3$, começa a partir do Teorema 4.11. A prova do Teorema 4.1.1 é aqui reescrita e foi baseada na seguinte proposição, cuja prova pode ser encontrada em Bauer *et al.* [9].

Proposição 4.1.1: Seja G um grafo tal que $\lambda(G) = k(G)$. Todo conjunto de corte com uma quantidade mínima de arestas de G é formado ou, somente, por arestas incidentes a um vértice ou, somente, por arestas independentes.

Teorema 4.1.1: Para $m \geq 3n/2$, os grafos de Harary são *super-*λ.

Prova: Dado que $m \geq 3n/2$ e que $\lambda = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor$, é fácil mostrar que em todos os casos acima, $\lambda = \delta > 2$. Logo, para estes valores de m sempre é possível determinar grafos de Harary.

Os grafos de Harary atendem a propriedade (i) da Definição 4.1.1. Para provar que todos os grafos dos tipos $H_0(q)$, $H_1(q)$, $H_2(q)$ e $H_3(q)$ são *super-*λ, só precisamos provar que eles satisfazem também a propriedade (ii).

Tal prova será dividida em três partes. Na primeira, provaremos que, se $q \geq 2$, $q = \lfloor \frac{\delta}{2} \rfloor$, todo grafo de Harary do tipo $H_0(q)$ ou do tipo $H_1(q)$ é *super-*λ. Na segunda parte, provaremos a validade do resultado para os grafos do tipo $H_1(q)$, quando $q = 1$, ou seja, quando $\lambda = \delta > 2$. Finalmente, a terceira parte da prova mostra que tanto os grafos $H_2(q)$ e $H_3(q)$ também são *super-*λ.

Seja $q \geq 2$ e G um grafo de Harary do tipo $H_0(q)$ ou $H_1(q)$, construído pelo Algoritmo 2.2.1. O algoritmo inicia com n vértices rotulados, no sentido horário, de 0 a n-1. Durante a execução do Passo 3 é criado um ciclo C_n. Como $m \geq 3n/2$, é fato que

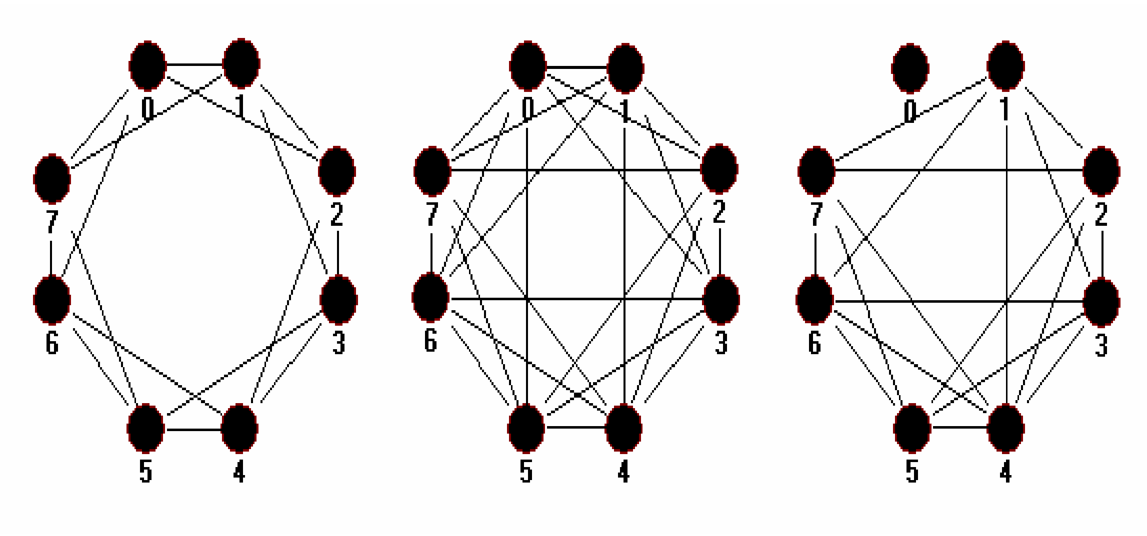
$m > n$ e $G \neq C_n$. Assim, na execução do algoritmo, uma corda será inserida em C_n, ligando dois vértices i e j não adjacentes no ciclo quando a distância entre eles é dada pelo menor valor entre $|j - i|_n \leq q$ e $n - |j - i|_n \leq q$. Se a distância for exatamente $q = 2$, uma corda ligará i a j, formando um triângulo (ciclo de comprimento 3). Sem perda de generalidades, pode-se colocar uma aresta entre os vértices i e j tal que $j = i + 2$. Assim, i e $i + 2$ têm, em cada um deles, pelo menos três arestas incidentes e o grafo corrente G' é do tipo $H_t(2)$, onde $t = 0, 1$. Seja G' um subgrafo gerador de G e U, um conjunto de corte de arestas de G de cardinalidade mínima, que neste caso é $\lambda = \delta = 4$. Sem perda de generalidade, uma das arestas $(i, i + 1)$ de U está no ciclo e uma outra é do triângulo da forma $(i, i + 2)$, de modo que i fica em uma componente de $G - U$ e $i + 1$ e $i + 2$ em outra. Sendo estas arestas incidentes entre si, da Proposição 4.1.1, o corte U é constituído somente de arestas incidentes a i. Logo, U é um corte trivial e o número de cortes de cardinalidade $\lambda = \delta = 4$ tem que ser igual ao número de vértices de grau 4 em G, caso em que G é do tipo $H_t(q)$, onde $t = 0, 1$. Se, então $G' \neq G$, o algoritmo prossegue a partir de G', tornando G' um subgrafo gerador de G. Neste caso, G terá grau mínimo $\lambda = \delta \geq 4$ e $q \geq 2$ e é um grafo de Harary do tipo $H_1(q)$. Seja S um corte de G de cardinalidade λ. S necessariamente conterá um corte U de G' com arestas como $(i, i + 1)$ e $(i, i + 2)$. Usando a mesma argumentação anterior, S será constituído por λ arestas incidentes em i. Assim, G terá tantos cortes de cardinalidade mínima quanto são os vértices de grau mínimo em G. Logo, para $q \geq 2$, todo grafo de Harary do tipo $H_0(q)$ ou $H_1(q)$ é *super*- λ.

Caso o grafo G fosse construído pelo Algoritmo de Hakimi o raciocínio da prova seria semelhante ao apresentado anteriormente.

Para ilustrar a primeira parte da prova, veja na Figura 4.3, os grafos (a), (b) e (c). Nela, foi escolhido o grafo $G = H_0(3)$ da Figura 4.3(b), cujo subgrafo gerador

$G' = H_0(2)$ está na Figura 4.3(a). O conjunto de corte S = {(0, 1); (0, 2); (0, 3); (0, 5); (0, 6); (0, 7)} de G, é formado pela quantidade mínima de arestas, igual ao grau mínimo que é 6, necessárias para desconectar G. A Figura 4.3 (c) mostra o grafo desconexo

$G - S$ que é formado por duas componentes, sendo uma delas constituída por um vértice isolado, o que faz U ser um corte trivial. Veja que S contém o corte U = {(0, 1); (0, 2); (0, 6); (0, 7)} de G' que é um subgrafo gerador de G do tipo $H_0(2)$.

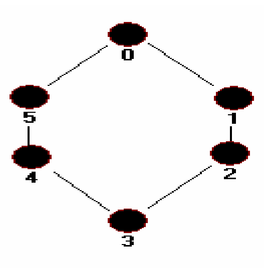


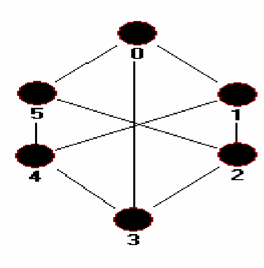
(a) $G = H_0(2)$ (b) $G' = H_0(3)$ (c) Grafo G - U

Figura 4.3 - Ilustra a primeira parte da prova do Teorema 4.1

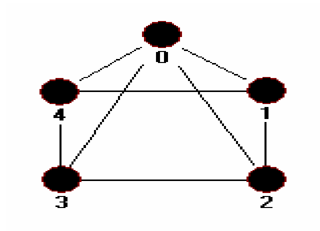
Na segunda parte da prova, faça $q = 1$ e tome G um grafo de Harary do tipo $H_1(1)$. De acordo com a seqüência de graus e o grau mínimo dos grafos $H_1(q)$, na Seção 2.1, veja que $\delta(G) = 3$, já que $q = 1$. Veja exemplos da Figura 4.4. Além disso, G tem um ciclo como subgrafo gerador, que é um grafo de Harary do tipo $H_0(1)$. Suponha por absurdo que U seja um conjunto de corte de arestas de G com 3 arestas independentes entre si. Como U tem um subconjunto de 2 arestas que desconectam o ciclo e estas são independentes, elas não podem ser consecutivas no ciclo. Sem perda de generalidades, considere as arestas (0, 1) e (2, 3) do corte. Se o grafo G foi gerado no Passo 4 do algoritmo, então as arestas $(1, 1 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ e $(2, 2 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ teriam que pertencer a U, o que gera uma contradição, pois a cardinalidade de U é 3. Logo, U não é constituído por arestas independentes. Pela Proposição 4.1.1, U tem que ser formado por arestas incidentes a um mesmo vértice. Novamente, o número de cortes de cardinalidade mínima é igual ao número de vértices de grau mínimo e G é *super*-λ. Se G fosse construído no Passo 5, a prova seria semelhante e por isso será omitida.

A Figura 4.4 mostra grafos de Harary do tipo $H_1(1)$ gerados nos Passos 4 ou 5 do Algoritmo 2.1.1 que podem ajudar o acompanhamento da segunda parte da prova.

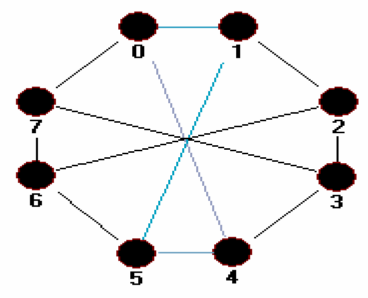




(a) *Ciclo* $H_0(1)$ (b) Grafo de Harary $H_1(1)$ com n par



(c) Grafo de Harary $H_1(1)$ com n ímpar



(d) Grafo de Harary $H_1(1)$ com $n = 8$ e C_4 destacado

Figura 4.4 – Grafos que ilustram a prova que $H_1(1)$ é *super*- λ

A terceira parte da prova se justifica facilmente, pois todo grafo de Harary G do tipo $H_2(q)$ ou $H_3(q)$ tem como subgrafo gerador, um grafo de Harary do tipo $H_0(q)$ ou $H_1(q)$. Seja esse grafo G'. Como todo conjunto de corte de cardinalidade mínima em G conterá um subconjunto de corte de G, usando os mesmos argumentos utilizados na primeira parte da prova, segue-se que U tem que ser constituído por arestas incidentes a um mesmo vértice. Logo, a quantidade de conjunto de cortes de comprimento mínimo é igual ao número de vértices de grau mínimo e G é *super*- λ . ■

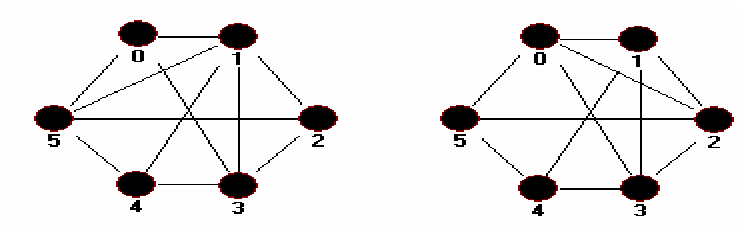
4.2 Grafos *max* λ *& min* m_λ

Da Observação 4.1, sabemos que há grafos *super*-λ que não são *max* λ *& min* m_λ. Caberia então perguntar se poderíamos construir grafos de Harary que sejam *max* λ *& min* m_λ. Pelo Teorema 4.1 sabemos que, para $\lambda = 2m/n \geq 3$, todos estes grafos são *super*-λ, mas nenhuma informação temos ainda quanto à existência ou não de alguns desses grafos serem também *max* λ *& min* m_λ. A Proposição seguinte garante que todos os grafos $H_0(q)$ e $H_1(q)$ são também *max* λ *& min* m_λ. Em seguida, a Observação 4.2 mostra que os grafos de Harary $H_2(q)$ e $H_3(q)$ podem não ser *max* λ *& min* m_λ.

Proposição 4.2.1: Todo grafo de Harary $H_0(q)$ e $H_1(q)$ é *max* λ *& min* m_λ.

Prova: Seja $q = \lfloor \frac{\delta}{2} \rfloor$, sabendo-se que qualquer grafo de Harary G do tipo $H_0(q)$ ou $H_1(q)$ tem $m = \lfloor \frac{\delta n}{2} \rfloor$ arestas e $\delta = \lambda = k = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor$. Se $G = H_0(q)$, então G é regular de grau $2q$; caso $G = H_1(q)$ quando δ ímpar e n par, G é regular de grau $2q + 1$. Quando δ e n forem ambos ímpares, $G \in H_1(q)$ e tem $n - 1$ vértices de grau $2q + 1$ e apenas um de grau $2q + 2$. Estes grafos possuem como subgrafo gerador um n-ciclo e como eles são extremais em relação ao menor número de arestas entre todos os grafos com máxima conectividade de aresta, podemos afirmar que eles também possuem a menor quantidade de vértices com grau $\delta = \lambda = k = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor$. Portanto pelo que foi apresentado e pela Proposição 4.1.1 e pelo Teorema 4.1.1 $H_0(q)$ e $H_1(q)$ possuem a menor quantidade de conjuntos de cortes de arestas com cardinalidade igual a λ, ou seja, são *min* m_λ. Para provar esta última afirmação, faça p ser o número de vértices de grau igual a $\lambda = \delta$ de um grafo *max* λ. Se um grafo G é *max* λ pode-se escrever que $2m = n\delta + r$. É fácil ver que o limite inferior para a soma dos graus (que é igual ao dobro do número de arestas) seria dado por $2m \geq p\delta + (n - p)(\delta + 1)$, ou seja, $2m \geq n\delta + n - p$. Substituindo-se $2m$ por $n\delta + r$ encontra-se $p \geq n - r$. Assim, o menor número possível de vértices com grau igual a λ deve igual a $n - r$. Os grafos $H_0(q)$ são regulares com grau $2q$ e são *super-*λ, portanto $p = n$. A mesma explicação é válida quando $H_1(q)$ é regular. Os grafos $H_1(q)$ quando não são regulares também são *super-*λ e possuem um vértice de grau $2q + 2$ e os demais grau $2q + 1$. Acarretando que $2m = n\delta + 1$ e p exatamente igual a $n - r$ (no caso $r = 1$). Logo, todo G, grafo de Harary $H_0(q)$ ou $H_1(q)$ é *max* λ *& min* m_λ. ■

Observação 4.2.1: Existem números naturais n e m tais que $2m/n \geq 3$ para os quais há grafos de Harary que, embora sejam *super-*λ, não são *max* λ *& min* m_λ. Os grafos da Figura 4.5 são de Harary *super-*λ do tipo $H_3(1)$, sendo que o da Figura 4.5(a) não é *max* λ *& min* m_λ e o da Figura 4.5(b) é *max* λ *& min* m_λ.



(a) (b)

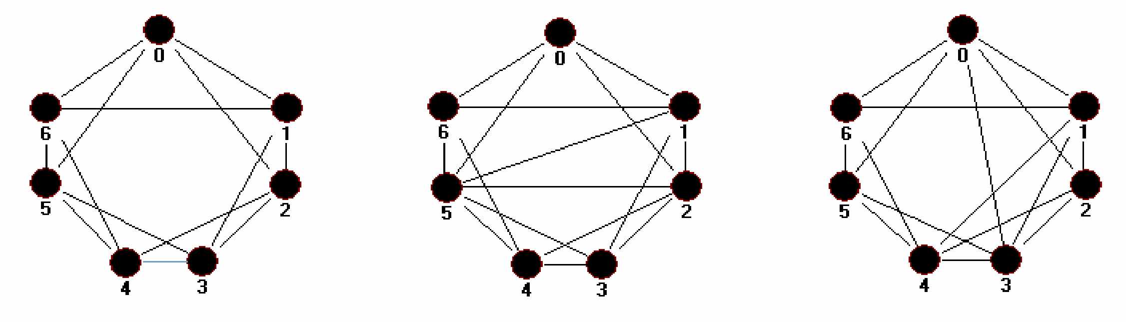
Figura 4.5: Grafo de Harary *super-*λ em (a) e grafo de Harary *super-*λ *max* λ *& min* m_λ em (b)

O teorema seguinte mostra que para qualquer n e m é sempre possível construir grafos de Harary $H_2(q)$ e $H_3(q)$ *max* λ *& min* m_λ. Uma modificação no Algoritmo 2.1.1 permite que os grafos construídos sejam *max* λ *& min* m_λ. Este Algoritmo está apresentado logo após o Teorema 4.2.1.

Teorema 4.2.1: Para todos os números naturais n e m tais que $\frac{2m}{n} \geq 3$, há grafos de Harary $H_2(q)$ e $H_3(q)$ que são *max* λ *& min* m_λ.

Prova: Pelo teorema precedente, precisa-se mostrar somente a existência de um grafo G do tipo $H_2(q)$ e outro do tipo $H_3(q)$ em $G_\lambda(n, m)$ com o menor número possível de vértices com grau igual a λ. Assim, repetimos o que foi apresentado na prova da Proposição 4.2.1. Faça p ser o número de vértices de grau igual à $\lambda = \delta$ de um grafo *max* λ. Sabendo-se que $2m = n\delta + r$, é fácil ver que o limite inferior para a soma dos graus seria dado por $2m \geq p\delta + (n - p)(\delta + 1)$, ou seja, $2m \geq n\delta + n - p$. Substituindo $2m$ por $n\delta + r$ encontra-se $p \geq n - r$. Assim, os grafos de Harary do tipo $H_2(q)$ ou $H_3(q)$ com o menor número possível de vértices com grau igual a λ deve ter exatamente $n - r$ vértices de grau δ.

Além disso, por G ser de Harary, ele tem que tomar uma das seguintes formas ou G é do tipo $H_2(q)$, $0 < r < \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ ou G é do tipo $H_3(q)$, $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor < r \leq n - 1$. (i) No primeiro caso, a seqüência de graus é determinada e G possui r vértices de grau $\Delta(G) = 2q + 1$, tendo todos os demais, grau $\delta = \lambda = 2q$. Logo, o número mínimo de vértices com grau igual a λ é exatamente $n - r$. Por isso, não é possível haver outro grafo com um número de vértices de grau mínimo menor que este. Conseqüentemente, todo grafo de Harary do tipo $H_2(q)$ é *max* λ *& min* m_λ. O grafo $H_2(q)$ obedece às condições apresentadas em (i) somente se ele for construído pelo Algoritmo de Hakimi. Isto se dá, pois, segundo o procedimento descrito por Bauer *et al.* [9] para a construção de grafos Gerais de Harary, a seqüência de graus não é determinada, dado que a inserção de vértices é feita de forma aleatória, reveja seção 2.4. Sendo assim, dependendo da forma que estas arestas são inseridas e do valor atribuído a $\Delta(G)$, é possível existir diferentes grafos com diferentes números de vértices de grau mínimo. Logo, eles não são *max* λ *& min* m_λ. Os grafos das Figuras 4.6(b) e (c) têm como subgrafo gerador o grafo da Figura 4.6(a). Enquanto o grafo em (b) foi construído seguindo o procedimento de Bauer *et al.* [9], a partir da inserção aleatória de arestas em (a), o grafo em (c), foi construído pelo Algoritmo de Hakimi. Veja que este último obedece todas as condições descritas em (i) e o grafo em (b) não.



(a) (b) (c)

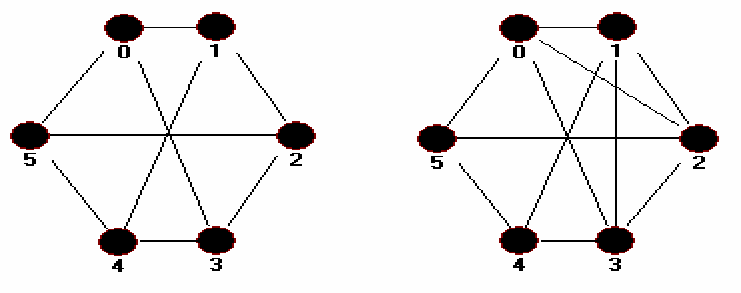
Figura 4.6: Subgrafo gerador H_0 (2) e grafos de Harary H_2 (2) construídos segundo Bauer *et al.* em (b) e segundo Hakimi em (c)

(ii) Caso em que G é do tipo $H_3(q)$, $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor < r \leq n-1$. Neste caso, o grau mínimo de G é $\delta(G) = 2q + 1$ e o grau máximo $\Delta(G)$ varia no intervalo $\delta(G) + 1 \leq \Delta(G) \leq \delta(G) + r - \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Logo, dependendo do valor atribuído a $\Delta(G)$, existirão grafos diferentes com diferentes número de vértices de grau mínimo e haverá grafos $H_3(q)$ que não serão *max* λ *& min* m_λ. Assim, o grafo de Harary do tipo $H_3(q)$

com o menor número possível de vértices com grau igual a λ deve ter exatamente $n - r$ vértices de grau δ.

Os casos abaixo descrevem como adicionar $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ arestas em um grafo $H_0(q)$ ou $H_1(q)$ para se obter um $H_3(q)$ com o menor número possível de vértices de grau mínimo, ou seja, igual a $n - r$. Para que isso ocorra, a inserção deverá, sempre que possível, ser constituída de arestas independentes e tal que $p = n - r$ e $\Delta = \delta + 1$, além disso, $\delta[H_3(q)] = 2q + 1$, portanto, ímpar. Pode-se observar que se $\delta = n - 1$ então $r = 0$ e, neste caos, G é um grafo completo. Mas, como se sabe, os grafos de Harary $H_2(q)$ e $H_3(q)$ não podem ser completos, por isso, vamos tomar $3 \leq \delta < n\text{-}1$.

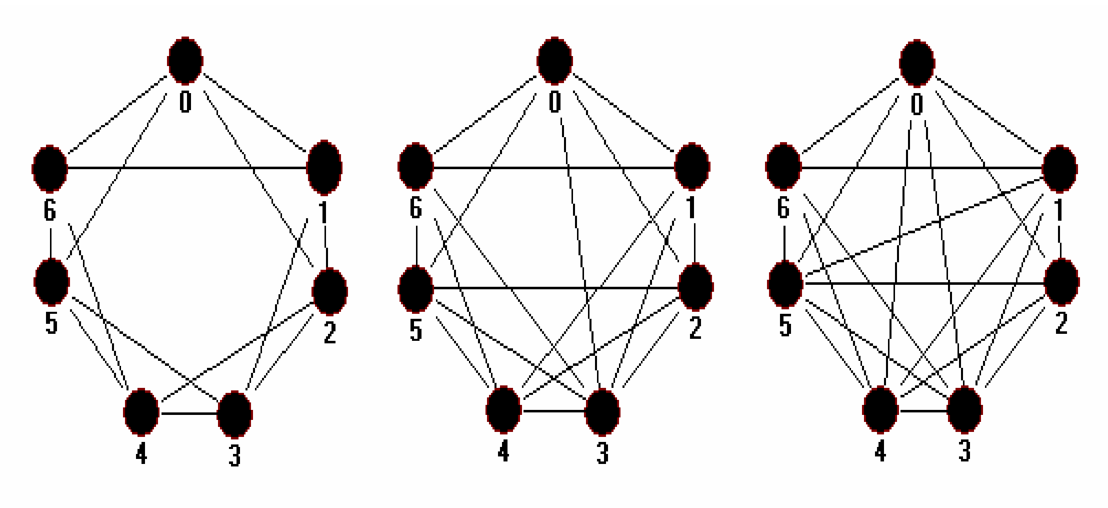
Caso 1: n par e δ ímpar: A construção é feita a partir de um grafo de Harary $H_1(\frac{\delta-1}{2})$, como o da Figura 4.7(a), que consiste de um grafo $H_0(\frac{\delta-1}{2})$ com as cordas da forma $(i, n/2 + i)$, $i = 0,\ldots, n/2 - 1$. Assim, como $\delta < n - 1$, as arestas $(i, n/2 - 1 + i)$, $i = 0,\ldots, (n/2) - 2$, formam um conjunto de arestas independentes com n-2 vértices não pertencentes a $H_1(\frac{\delta-1}{2})$. Logo, pelos mesmos motivos expostos no caso 1, o número r é par, e está no intervalo no intervalo $0 < r \leq n - 2$. Desta forma, no grafo resultante haverá $n - r$ vértices de grau δ, como acontece no grafo da Figura 4.7(b).



(a) $H_1(1)$ (b) $H_3(1)$

Figura 4.7: Grafo H_3 (1) em (b) construído a partir do Grafo H_1 (1) em (a)

Caso 2: n ímpar e δ ímpar: A construção é feita a partir de um grafo $H_1(\frac{\delta-1}{2})$ com grau δ, como o da Figura 4.8(b) com n = 7 e m = 18 resultante de um grafo $H_0(\frac{\delta-1}{2})$ com grau δ -1, como o da Figura 4.8(a) n = 7 e m = 14, acrescido das arestas $[i, (n-1)/2 + i]$, $i = 0,..., (n-1)/2$. Assim, $H_1(\frac{\delta-1}{2})$ tem n -1 vértices de grau δ e somente o vértice $(n-1)/2$ com grau δ. No caso em que n é ímpar, isto está de acordo com a definição do grafo H_1. As arestas $\{i, [(n-3)/2] + (i+1)\}$, para $i = (n+1)/2,..., n-2$, onde $[(n-3)/2 + (i+1)]$, são tomadas por mod n e constituem um conjunto de arestas independentes que não estão no grafo. A quantidade de vértices para formar estas arestas não pode ser maior do que n-3. Logo, $r-1 \leq n-3$. Além disso, as arestas introduzidas deverão ser independentes no grafo $H_1(\frac{\delta-1}{2})$ e formarão um grafo $H_3(q)$, como o que está representado na Figura 4.8(c). ■



(a) $H_0(2)$ (b) $H_1(2)$ (c) $H_3(2)$

Figura 4.8: Grafo $H_3(2)$ em (c) construído a partir dos grafos $H_0(2)$ em (a) e $H_1(2)$ em (b)

4.3 - Um algoritmo de construção para Grafos de Harary em $G_{\lambda\ ,m_\lambda}(n,m)$

O Teorema 4.2 garante que todo grafo de Harary do tipo $H_2(q)$ é *max* λ *& min* m_λ e que é sempre possível encontrar um que seja. No entanto, isto não significa que todos do tipo $H_3(q)$ o são desta forma. E de fato, não são. Algoritmo de Hakimi, dado no Capítulo 2**,** constrói grafos que podem não ser *max* λ *& min* m_λ, dado que o Passo 4 permite a inserção de arestas aleatórias ao subgrafo gerador regular maximal do grafo corrente. Além deste, o procedimento de Bauer *et al.* [9] também permite a inserção aleatória de arestas, tanto para a construção de um grafo $H_2(q)$ quanto de um $H_3(q)$. Assim, seria interessante saber construir grafos de Harary que seguramente sejam *max* λ *& min* m_λ. Como contribuição deste trabalho, é apresentado na próxima um algoritmo que constrói grafos de Harary que sejam *max* λ *& min* m_λ, ou melhor, que estejam na classe $G_{\lambda,m_\lambda}(n,m)$ para $\lambda \geq 3$.

A seguir descreveremos dois exemplos quando δ é par, que junto com os casos 1 e 2 mostrados anteriormente para δ ímpar, mostram como trabalha o Algoritmo 4.3.1 ao construir Grafos de Harary que sejam seguramente *max* λ *& min* m_λ.

Exemplo 4.3.1: n par e δ par: A construção é feita a partir de um grafo G' de Harary do tipo $H_0(\frac{\delta}{2})$. Sabemos que $2m = n\delta + r$ e como $n\delta$ é par, $r \leq n - 2$ será também par. As arestas independentes que não pertencem a G' são da forma (i, $n/2 + 1$) para $i = 0,..., n/2 -1$. Assim, encontramos r vértices que formam um conjunto de $r/2$ arestas independentes que inseridas de forma a obedecer às restrições mostradas vão formar um grafo $H_2(\frac{\delta}{2})$ com min m_λ , como acontece com o grafo exemplo da Figura 4.9(b). Se a inserção fosse feita utilizando-se pelo menos duas arestas incidentes a um mesmo vértice, teríamos pelo menos um vértice a mais em G com grau mínimo que o grafo obtido com inserção de arestas independentes.

Algoritmo 4.3.1: Constrói grafos de Harary pertencentes a $G_{\lambda,m_\lambda}(n,m)$, $\lambda \geq 3$.

Entrada: n e δ Є IN, $\delta < n$ e $H = (V, E)$ o grafo trivial, isto é, $v = (0,..., n - 1)$ e $E = 0$.

1 – Inicie o grafo H com n vértices isolados numerados de 0 a n-1 no sentido horário.

2 – Faça

$$q = \left\lfloor \frac{\delta}{2} \right\rfloor;$$

3 – Para $i = 0,..., n$-2

  Para $j = i + 1,..., n$-1

   se $\left|(j-i)_n\right| \leq q$ ou $n - \left|(j-i)_n\right| \leq q$ então

    $E \leftarrow E \cup \{(i, j)\}$

  Retorne o grafo H

4 – Se δ par e n par então

  para $i = 0,..., (n/2) – 2$,

   insira uma aresta entre o vértice i e o vértice $(i + n/2)$

 Retorne o grafo H

5 – Se δ par e n ímpar então

  para $i = 0,..., [(n-1) / 2] – 1$

   insira uma aresta entre o vértice i e o vértice $[(n-1/2) + i]$

 Retorne o grafo H

6 - Se δ ímpar e n par então

  para $i = 0,..., (n/2) – 1$

   insira uma aresta entre o vértice i e o vértice $(i + n/2)$

  para $i = 0,..., (n/2) –2$

   insira uma aresta entre o vértice i e o vértice $[i + (n/2) - 1]$

 Retorne o grafo H

7 – Se δ e n são ímpares então

   insira uma aresta entre o vértice 0 e o vértice $(n - 1) /2$

   insira uma aresta entre o vértice 0 e o vértice $(n + 1) /2$

  Para $i = 1,..., (n-3) /2$

   insira uma aresta entre o vértice i e o vértice $[i + (n+1) /2]$

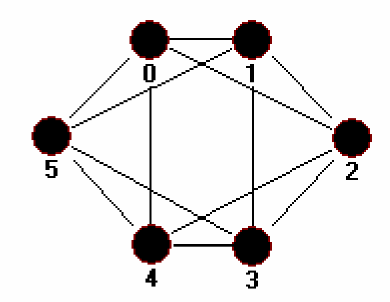
   insira uma aresta entre o vértice i e o vértice $[i + (n - 1) /2]$

 Retorne o grafo H

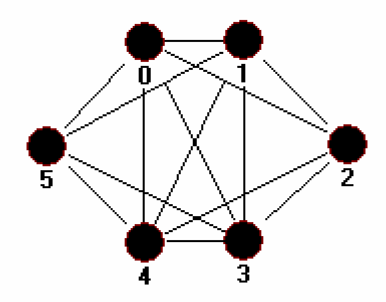
Fim.

.

A Figura 4.9(a), mostra um grafo G' do tipo $H_0(2)$ com $\frac{n\delta}{2}$ arestas. O grafo de Harary H_2 (2) = K_6 – {(2,5)} é apresentado na Figura 4.9(b) e tem como subgrafo gerador o grafo G' obtido pelo acréscimo de 2 arestas independentes em G.



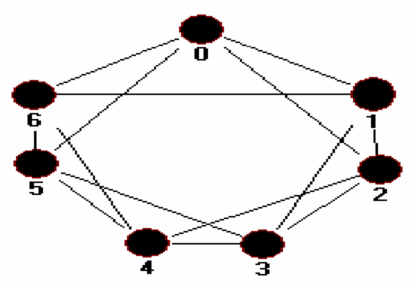
(a) H_0 (2)



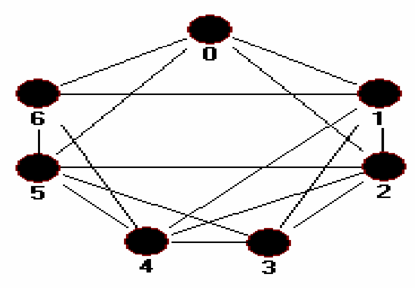
(b) H_2 (2)

Figura 4.9: Grafo H_2 (2) em (b) construído a partir do Grafo H_0 (2) em (a)

Exemplo 4.3.2: n ímpar e δ par: Como $\delta < n$-1, o grafo $H_0(\frac{\delta}{2})$ não utiliza as arestas [i, (n-1) /2 + i], i = 0,... , [(n-1)/2] -1, como o grafo com n = 7 e m = 14 da Figura 4.10(a). Estas formam um conjunto de arestas independentes com n -1 vértices que podem ser usadas para formar um grafo H_2(2). Neste caso, pelos mesmos motivos expostos no caso 1, r é par e não maior do que a n-1. Com isso, o conjunto das arestas independentes inseridas no grafo $H_0(\frac{\delta}{2})$, a partir dos r vértices, deixa $n - r$ vértices de grau δ, como o grafo com n = 7 e m = 16 da Figura 4.10(b).



(a) H_0 (2)



(b) H_2 (2)

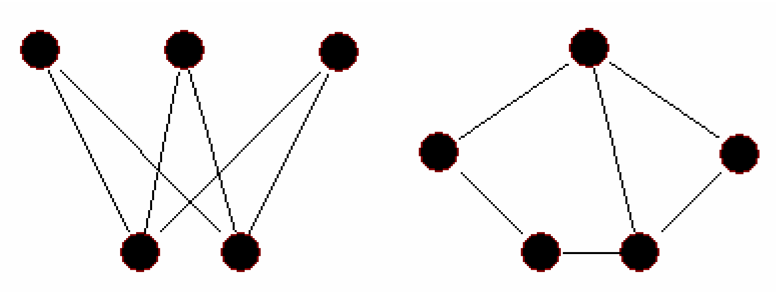
Figura 4.10: Grafo H_2 (2) em (b) construído a partir do Grafo H_0 (2) em (a)

Capítulo 5

Grafos *max* λ & *min* m_λ quando $\lfloor \frac{2m}{n} \rfloor = 2$

Quando $\frac{2m}{n} \geq 3$, vimos que os grafos de Harary são *super*-λ e, sob esta mesma condição, embora todos os grafos de Harary do tipo $H_0(q)$ e $H_1(q)$ sejam *max* λ & *min* m_λ, o mesmo não acontece com os do tipo $H_2(q)$ e $H_3(q)$. No entanto, existirá pelo menos um grafo de cada um destes tipos que é *max* λ & *min* m_λ. Neste capítulo, estudaremos os grafos de $G_{\lambda,m_\lambda}(n,m)$, em que λ = 2, temos que para certos valores de *m* e *n* sob as condições anteriormente admitidas, nem todos os grafos de Harary são *super*-λ.

Os grafos da Figura 5.1 pertencem à família $G_2(5, 6)$. Enquanto aquele da Figura 5.5(a), em que m_2 = 3, é *super*-λ, o da Figura 5.5(b), com m_2 = 4, não o é. Observe que somente este último é de Harary.



(a) $K_{2,3}$ (b) C_5 + uma aresta

Figura 5.1: Grafos em $G_2(5, 6)$

O procedimento mostrado na Seção 4.3 do Capítulo 4 não se aplica a esta família de grafos. Para se estudar o caso em questão, faz-se necessário usar o conceito de *grafos purificados* aplicado a *caminhos disjuntos por arestas*, como aparece em [9] e [75].

A inserção de um vértice de grau 2 em uma aresta de um dado grafo ou multigrafo é uma operação conhecida por *subdivisão de aresta*. Mais formalmente, seja uma aresta $e = (v, w)$ de um multigrafo G (lembrar que um grafo simples é um caso particular de multigrafo) e considere o grafo G' resultante de G, quando $\boldsymbol{e}$ é substituída pelo par de arestas (v,u) e (u, w) em G. Em geral, a aresta $\boldsymbol{e}$ é referida como uma *aresta subdividida.* É claro que G' pode vir a ser um grafo simples.

Veja que ambos os grafos da Figura 5.1 resultam da inserção de vértices de grau 2 nas arestas do multigrafo mostrado na Figura 5.2.

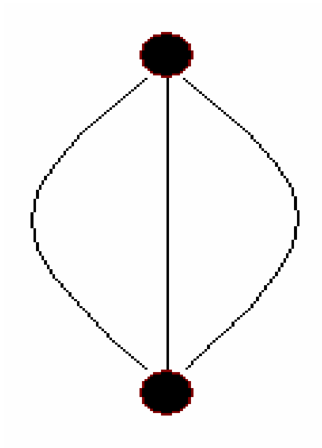
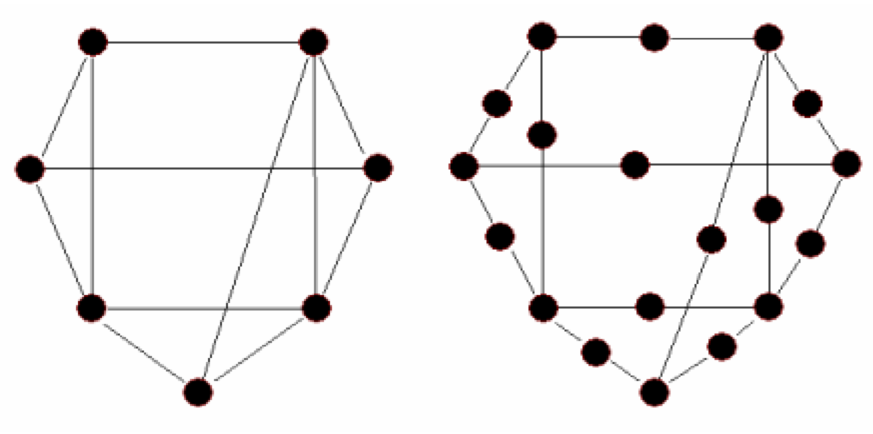


Figura 5.2: Multigrafo onde as arestas são subdivididas para se obter os grafos da Figura 5.1

Definição 5.1: Um grafo $S = S_1(G)$ é um *grafo subdivisão* de um multigrafo G, ou simplesmente uma *subdivisão de* G, quando S_1 é obtido de G pela *subdivisão de cada uma das arestas de* G, ou seja, S_1 é obtido de G, de modo que cada aresta em S seja subdividida exatamente em duas a partir da sua correspondente em G. Se S for obtido de G por sucessivas operações de subdivisão, denotamos $S = S_k(G) = S(S_{k-1}(G))$, e dizemos que S_k é a k-ésima subdivisão de G.

A Figura 5.3(b) ilustra um grafo S_1 obtido de G, Figura 5.3(a), por uma operação de subdivisão em cada uma das arestas de G.



(a) (b)

Figura 5.3: Grafo subdivisão S_1 em (b) obtido do grafo em (a)

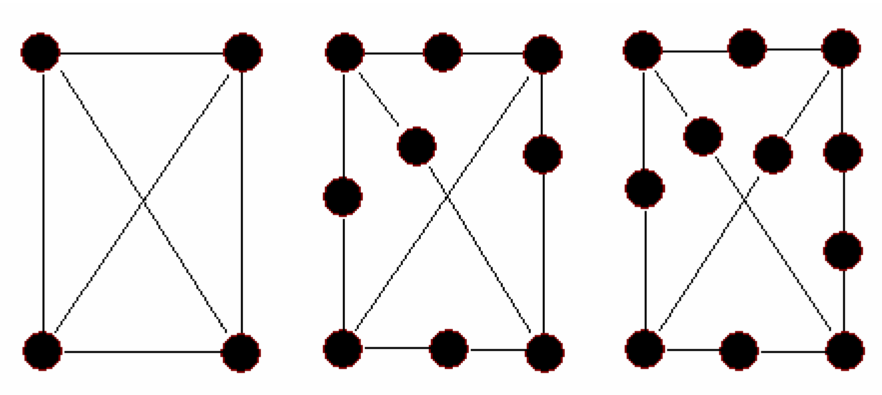
Observação 5.1: Sejam $m > n$ e r números naturais tais que $n > 3$ e $r > 2$. Seja H um grafo simples, r-regular, com n vértices e m arestas, em que H_1 seja a primeira subdivisão de H. Então H_1 é tal que $n_1 = n + nr/2$ e $m_1 = 2m$. Este resultado pode ser generalizado com a seguinte relação de recorrência. Dado H, a *primeira subdivisão* H_1 de H é tal que $n_1 = n + m$ e $m_1 = 2m$; a *segunda subdivisão* H_2 de H tem $n_2 = n_1 + m$ e $m_2 = 3m$. Logo, $n_2 = n + 2m$; a *terceira subdivisão* H_3 de H tem $n_3 = n_2 + m$ e $m_3 = 4m$. Consequentemente, $n_3 = n + 3m$. Generalizando, a *k-ésima subdivisão* H_k de H é tal que $n_k = n + km$ e $m_k = (k + 1)m$.

Observação 5.2: Sejam $m > n$ e r números naturais tais que $n > 3$ e $r > 2$. Seja H um grafo simples, r-regular, com n vértices e m arestas em que H_k seja a k-subdivisão de H. Então H_k é tal que $n_k = n + km$, e $m_k = (k + 1)m$.

Definição 5.2: Seja G um grafo com n vértices e m arestas. Seja um natural $n_k < m$, diz-se que n_k arestas são subdivididas quando é inserido um vértice de grau 2 em cada uma dessas arestas. O grafo G' neste caso terá n_k arestas com uma única subdivisão e as demais arestas sendo exatamente as mesmas de G. Caso $n_k \geq m$, faça

$n_k = \beta_1 m + \beta_2$, β_1 e $\beta_2 \in \mathbb{N}$. Quando $n_k = m$, $\beta_2 = 0$, cada aresta pode receber β_1 vértices de grau 2. Se isto ocorrer, o grafo resultante *G'* será um grafo subdivisão, conforme Definição 5.5. Se $\beta_2 \neq 0$, cada aresta de *G* poderá receber β_1 novos vértices de grau 2 e, ainda, haverá β_2 arestas distintas em *G,* cada uma delas, capaz de receber mais um novo vértice de grau 2. O grafo resultante *G'* terá, a partir de *G*, β_2 arestas com duas inserções de vértices de grau 2 e as demais com apenas uma inserção. Em qualquer um destes casos, e somente nestes, dizemos que a operação é uma subdivisão uniforme de arestas de *G* e o grafo resultante *G'* é dito ser um *grafo subdivisão uniforme* de *G* e denotado por $G_{su.}$

Observe que um grafo subdivisão uniforme de G_{su} permite números de operações de subdivisões de arestas distintos, o que não acontece com o grafo subdivisão de arestas. Ou seja, todo grafo subdivisão é um grafo subdivisão uniforme, mas a recíproca não é verdadeira. Como exemplo, a partir do grafo ilustrado na Figura 5.4(a), obtemos os grafos G_{su} mostrados nas Figuras 5.4(b) e 5.4(c). O primeiro, com 5 arestas subdivididas e o segundo, com 7.



(a) (b) (c)

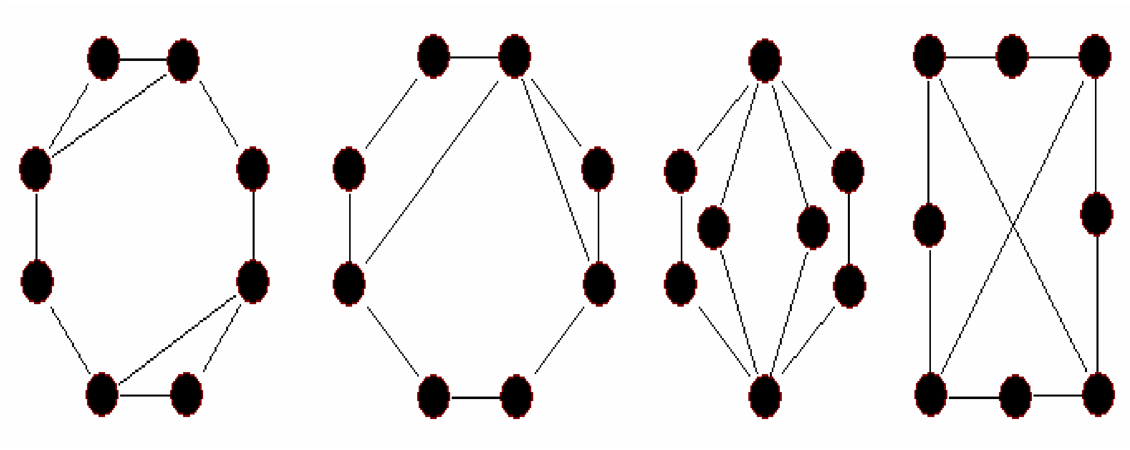
Figura 5.4: Grafos G_{su} em (b) e (c) obtidos a partir da subdivisão uniforme de arestas no grafo em (a)

Definição 5.3: Sejam u e v dois vértices adjacentes de G, a *contração elementar* (ou, simplesmente, contração) de dois vértices adjacentes u e v é uma operação que resulta num grafo G', em que os vértices u e v são substituídos por um único vértice w, tendo como arestas incidentes exatamente aquelas que eram incidentes a u ou a v em G. Para maiores detalhes veja [40]. Dado um caminho P_n, uma contração de dois vértices adjacentes u e v reduz P_n a P_{n-1}. Uma seqüência sucessiva de n-1 contrações elementares de vértices de P_n o reduzirá a um único vértice. Em geral, um grafo G é *contratível* a H, se H resulta de G por sucessivas contrações elementares. Neste caso podemos dizer que H é uma *contração* de G. Por exemplo, no caso dos caminhos, se $t < k$, P_t é uma *contração* de P_k. Quando o grafo G possui um subgrafo induzido isomorfo a um caminho P_k, tal que em G, os graus dos vértices extremais de P_k sejam maiores ou iguais a 3 e os graus dos vértices intermediários sejam exatamente 2, a operação que resulta no grafo G' obtido de G por (k-2) contrações sucessivas dos vértices intermediários de P_k, é chamada de *contração por caminho*. Observe que G' pode não resultar em um grafo simples.

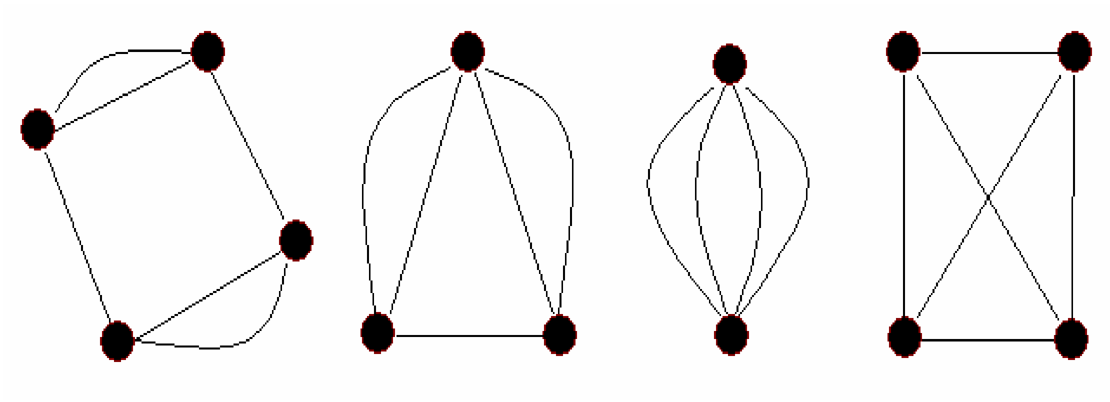
5.1 Grafos Purificados

Os conceitos de grafos Purificados disponíveis na literatura foram encontrados de maneira muito intuitiva e pouco formal, nos artigos de Bauer *et al.* [9], Boesch *et al.* [15] e Wang e Zhang [75]. Esta seção tem como objetivo definir de forma clara e precisa o que é um grafo Purificado.

Definição 5.5.1: Um grafo purificado é um multigrafo quando ele é obtido de G por sucessivas *contrações por caminhos* aplicados a todos os caminhos disjuntos por arestas de G. A operação que faz resultar G' por sucessivas contrações de todos os caminhos disjuntos de G é chamada de *purificação do grafo G* e G' é o *grafo purificado* de G que denotamos por $G' = P(G)$.



(a) G_a (b) G_b (c) G_c (d) G_d



(e) $P(G_a)$ (f) $P(G_b)$ (g) $P(G_c)$ (h) $P(G_d)$

Figura 5.5: Grafos da classe $G_2(8, 10)$ em (a), (b), (c) com seus respectivos grafos purificados $P(G_a)$, $P(G_b)$, $P(G_c)$ e $P(G_d)$ em (e), (f), (g) e (h).

Observação 5.1.1: Se um grafo simples S é resultado de uma k-subdivisão uniforme de um multigrafo G então G resulta de uma contração de S. Assim, dado um grafo G qualquer, seu grafo purificado $P(G)$ é uma contração de G, pois ele é obtido por sucessivas contrações de pares de vértices de G. Por exemplo, na Figura 5.5, todos os multigrafos dados em (e), (f), (g) e (h) são contrações dos respectivos grafos que estão nas Figuras 5.5(a), 5.5(b), 5.5(c) e 5.5(d).

5.2 Construção de grafos *max λ & min*$_\lambda$ quando $\lfloor \frac{2m}{n} \rfloor = 2$

Os exemplos dos grafos dados nas Figuras 5.1 e 5.5 motivaram Bauer *et al.*[9] a observar que se existem grafos pertencentes à classe $G_2(n, m)$ cujos grafos purificados são os mesmos e, terá menor valor para m_2, aquele que foi obtido a partir de uma inserção uniforme de vértices de grau 2 em $P(G)$. Os grafos da Figura 5.5 todos pertencentes a $G_2(8, 10)$ e foram estudados por Bauer *et al.* [9] para se conhecer o efeito sobre m_2 em grafos de uma mesma classe tendo distintos grafos purificados. Na Figura 5.5(a), o grafo tem $m_2 = 8$, na Figura 5.5(b), $m_2 = 7$, na Figura 5.5(c), tem $m_2 = 8$ e, finalmente, o grafo da Figura 5.5(d) tem $m_2 = 4$. Analisando ainda a Figura 5.5(a), Bauer *et al.* [9] observaram que apesar de G_b possuir mais vértices de grau 2 que G_a, $m_2(G_a)$ é menor que $m_2(G_b)$. Poderíamos acreditar que isto ocorre devido ao fato do grafo Purificado $P(G_b)$ possuir $\lambda = 3$, que é maior do que a conectividade de aresta $\lambda = 2$ do purificado $P(G_a)$. Todavia, um menor valor para m_2 não é garantido por um incremento na conectividade de aresta do grafo purificado, como acontece em G_b, com $m_2 = 7$, e em G_c, com $m_2 = 8$. Nestes casos, a conectividade de arestas de seus respectivos purificados $P(G_b)$ e $P(G_c)$ são, respectivamente, iguais a 3 e 4. Estas observações, junto com o grafo G_d, Figura 5.5(d), motivaram Bauer *et al.* [9] a acreditar que o menor valor para m_2 é obtido a partir de sucessivas subdivisões uniformes em um grafo purificado com $\lambda = 3$. A prova de que este procedimento gera um grafo G com m_2 mínimo se dá, a partir de um grafo qualquer, cuja conectividade de aresta é $\lambda \geq 2$ e tal que, para todo par de vértices u e v, ambos com graus superiores a 2, possa ser decomposto por caminhos disjuntos por arestas que ligam u a v, de modo que cada grau dos vértices intermediários, caso existam, seja exatamente grau 2.

A partir de agora, mostraremos uma técnica de construção de grafos confiáveis com $\lambda \geq 2$ e m e n conhecidos. Para isso, suponha que certo grafo G possa ser decomposto por y caminhos disjuntos por arestas, onde os vértices terminais de cada caminho tenham grau 3 e os intermediários, caso existam, grau 2. Considere então A_i como o conjunto de todos os caminhos disjuntos por arestas e, para $i = 1,..., y,$ faça T_i o conjunto de todos os vértices de grau 2 dos respectivos caminhos disjuntos por arestas. O grafo G da Figura 5.6, com 5 vértices, numerados de 0 a 4, sendo o vértice u igual a 0 e o vértice v igual a 2, é usado como exemplo. Este grafo possui 3 caminhos disjuntos por arestas ligando os vértices u e v. Portanto, $y = 3$ e $i = 1, 2$ e 3.

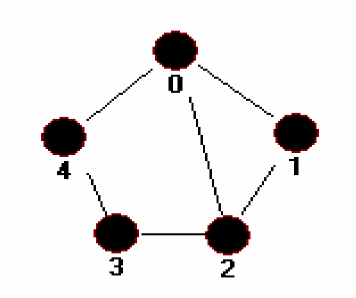


Figura 5.6: Grafo que pode ser decomposto por caminhos disjuntos por arestas.

Os valores para A_i e T_i entre os vértices u e v são os seguintes: $A_1 = \{0, 1, 2\}$ => $T_1 = \{1\}$, $|T_1| = 1$; $A_2 = \{0, 4, 3, 2\}$ => $T_1 = \{4, 3\}$, $|T_2| = 2$; $A_3 = \{0, 2\}$ => $T_3 = \phi$, $|T_3| = 0$. Observe que T_i pode ser vazio. Se $|T_i| \neq 0$, a remoção de qualquer par de arestas de A_i desconecta o grafo. Com isso, chega-se às seguintes relações:

(i) $m_2 \geq \sum_{i=1}^{y} \binom{|T_i|+1}{2}$;

(ii) $p_2 = \sum_{i=1}^{y} |T_i|$, representa o número de vértice com grau 2 e;

(iii) $m = \sum_{i=1}^{y} |T_i| + 1$, a quantidade de arestas.

Sabendo-se que G tem n vértices, m arestas e $\lambda = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor = 2$, é possível relacionar o número de vértices e arestas do seguinte modo:

$$2m = n\delta + r \qquad (5.2.1)$$

Pela prova do Teorema 4.2.1, podemos concluir que $p_2 \geq n - r$, onde p_2 *é* o número de vértices de grau 2. A equação (5.2.1) pode ser reescrita como $m = n + \frac{r}{2}$. Tomando-se $\frac{r}{2}$ igual a e, obtemos as seguintes relações:

(i) $m = n + e$; (5.2.2)

(ii) $p_2 \geq n - 2e$; (5.2.3)

(iii) $m = \sum_{i=1}^{y} |T_i| + 1 = \sum_{i=1}^{y} |T_i| + \sum_{i=1}^{y} 1 = \sum_{i=1}^{y} |T_i| + y$; (5.2.4)

(iv) $p_2 = \sum_{i=1}^{y} |T_i|$. (5.2.5)

Note que a fórmula para o cálculo de p_2 (5.2.5) é igual ao 1º termo da fórmula (5.2.4) e que $m = n + e$. Fazendo as substituições adequadas, encontramos: $n + e = p_2 + y$, que é igual a $p_2 = n + e - y$. Novamente, substituindo este valor para p_2 na inequação dada em (5.2.3), encontramos $y \leq 3e$. Isto significa que a quantidade de caminhos disjuntos em que o grafo G pode ser decomposto é limitada superiormente por $3e$. Resumindo estes resultados temos:

$$m_2 \geq \sum_{i=1}^{y} \binom{|T_i|+1}{2}, \qquad (5.2.6)$$

$$m = \sum_{i=1}^{y} |T_i| + 1, \qquad (5.2.7)$$

$$y \leq 3e. \qquad (5.2.8)$$

Como $P(G)$ deve possuir $\lambda = 3$, o grafo purificado é conexo 3-regular e, no mínimo, igual a um multigrafo com 2 vértices e 3 arestas. Portanto, podemos considerar que $P(G)$ possui $3e$ arestas e, conseqüentemente, podemos admitir que $y = 3e$. Com isso, o problema de encontrarmos o menor valor para m_2 pode ser reescrito da seguinte forma:

$$min \sum_{i=1}^{3e} \binom{x_i}{2} \tag{5.2.9}$$

onde $x_i = |T_i| + 1$.

Sujeito a:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{3e} x_i = m; \tag{5.2.10}$$

x_i é um inteiro para $i = 1, ..., 3e$,

onde $x_i = |T_i| + 1$, temos $x_i - 1 = |T_i| = w_i$, para $i = 1, ..., 3e$. Note que por construção, a diferença entre a quantidade de vértices com grau 2, inseridos nos diferentes caminhos disjuntos por arestas, não pode ser maior que 1, ou seja, $|T_i| - |T_{i+1}| \leq 1$. Com isso, é razoável admitir que a solução do problema em (5.2.9) é dado por x_i que é igual a s ou $s + 1$.

Sintetizando a solução do problema apresentado em (5.2.9) temos:

$$x_i = \begin{cases} s+1 & \text{para } i = 1, ..., L \\ s & \text{para } i = L+1, ..., 3e \end{cases}$$

Sabendo-se que $\sum_{i=1}^{3e} x_i = m$, a partir da equação (5.2.7) podemos obter:

$$m = \textstyle\sum_{i=1}^{L} s + 1 + \sum_{i=L+1}^{3e} s;$$

$$m = \textstyle\sum_{i=1}^{L} s + \sum_{i=1}^{L} 1 + \sum_{i=L+1}^{3e} s;$$

$$m = \textstyle\sum_{i=1}^{3e} s + \sum_{i=1}^{L} 1.$$

Concluímos então que $m = 3es + L$, para $0 \leq L < 3e$. Note que $\lfloor \frac{2m}{m} \rfloor = 2$ implica que $m < 3n/2$. Além disso, $m = n + e$. Desta forma, $e < n/2$ e $3e < m$.

Como $x_i = |T_i| + 1$, observe quando $x_i = s + 1$ temos $|T_i| = s$ e quando $x_i = s$ temos $|T_i| = s - 1$. Portanto o valor para m_2 pode ser calculado com a seguinte expressão:

$$m_2 \geq L\binom{s+1}{2} + (3e - L)\binom{s}{2}.$$

Generalizando o procedimento até aqui apresentado, é intuitivo então construir um interessante problema de otimização para calcular o menor valor para m_2:

$$min \sum_{i=1}^{y} \binom{x_i}{2}$$

Sujeito a:

$\sum_{i=1}^{y} x_i = m$;

x_i é um inteiro para $i = 1,..., y$;

$y \leq 3e$,

onde $x_i = |T_i| + 1$.

Para que a expressão (5.2.9) forneça o menor valor para $m_2(G)$, onde G é um grafo com n vértices, m arestas e $\lambda = \lfloor \frac{2m}{m} \rfloor = 2$ é necessário que G seja construído de forma que $p_2 = n - 2e$ e que o número de cortes de arestas com esta cardinalidade seja a menor possível.

Os conjuntos de cortes de arestas de um grafo *max* λ, com $\lambda = 2$ e cardinalidade também igual a 2 que possa ser decomposto por caminhos disjuntos, como sugerido por Bauer *et al.* [9], devem satisfazer uma das seguintes propriedades: (i) Tem que ser um conjunto de arestas incidentes a um vértice; (ii) precisa ser conjunto formado por pares de arestas de um mesmo caminho disjunto por arestas e, finalmente, (iii) tem que um conjunto formado por arestas diferentes que sejam também formados por pares de arestas de caminhos disjuntos. Os grafos das Figuras 5.5(d), 5.5(b) e 5.5(a) são exemplos para a primeira, segunda e terceira possibilidades de corte, respectivamente. A possibilidade (i) sempre ocorre. Entretanto pode não ser a única a ocorrer. Os grafos pertencentes à classe $G_{2,m_2}(n,m)$ que tenham apenas cortes de arestas incidentes a um único vértice são grafos *super-λ*. A possibilidade (ii) somente não ocorre nos grafos pertencentes a $G_{2,m_2}(n,m)$ que são *super-λ*. Os pares de arestas (0, 4) e (2, 3) no caminho A_2 = {0, 4, 3, 2} do grafo da Figura 5.6 é um exemplo desta situação. Em caso da possibilidade (iii) ocorrer, o valor de m_2 é maior que $\sum_{k=1}^{y}\binom{|T_k|+1}{2}$. Portanto, este grafo não pertence a $G_{2,m_2}(n,m)$.

Faça, agora, $e \geq 2$. A construção do grafo mais confiável começa com um grafo purificado G' regular com grau 3, conectividade de aresta igual a 3 e com $2e$ vértices. Como já foi mostrado $|T_i| + 1 = x_i = s + 1$ para $i = 1,\dots, L$ e $|T_i| + 1 = x_i = s$ para $i = L + 1,\dots, 3e$.

Desde que $s \geq 1$, segue-se que $|T_i| = s \geq 1$ para $i = 1,\dots, L$ e $|T_i| = s-1 \geq 0$ para $i = L+1,\dots, 3e$. Para formar o grafo G, insira s vértices de grau 2 em cada uma das L arestas do grafo purificado G' e s - 1 vértices de grau 2, em cada uma das $3e - L$ arestas restantes. Não é possível ocorrer a situação em que $s = 1$ e $L = 0$, pois, teremos $|T_i| = s = 1$ para $i = 1,\dots, L$ e $|T_i| = s-1 = 0$ para $i = L+1,\dots, 3e$, resultando em $m = \sum_{k=1}^{3e}(x_k) = 3e$, $m = n - e = 2e$ e $\lfloor \frac{2m}{n} \rfloor = 3$, caindo em uma contradição, pois queremos $\lambda = 2$. Assim, sempre no mínimo um T_i não é vazio e a conectividade de arestas será no máximo 2. É claro que $\lambda(G) \geq 2$ desde que G' não tenha uma ponte. Observe que existem $3e$ caminhos disjuntos por arestas com dois vértices terminais cada, denotados por u e v, com grau igual a 3 e todos os vértices internos com grau no máximo igual a 2 em G. Sendo o grafo Purificado G' 3-regular, a remoção de 2 arestas do Grafo G, cada uma de caminhos disjuntos diferentes, não o desconectam, pois cada caminho tem os vértices limites com grau igual a 3. Assim, os conjuntos de cortes de arestas são formados por pares de um mesmo caminho disjunto por arestas e são exatamente:

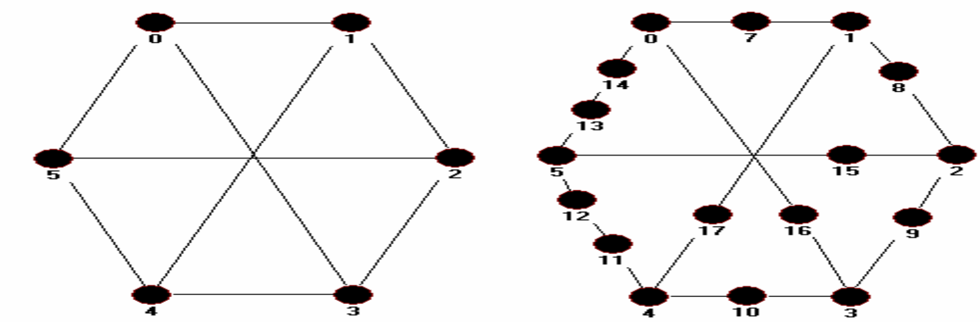
$$L\binom{s+1}{2} + (3e - L)\binom{s}{2}.$$

Antes da observação para o caso em que $e = 1$, apresentamos um exemplo ilustrativo:

Deseja-se formar um grafo G com 17 vértices e 20 arestas de forma que ele tenha conectividade máxima de arestas e a menor quantidade de conjunto de cortes de arestas com cardinalidade igual a λ. Como $\lambda = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor = 2$, deve-se construir um grafo pertencente a $G_{2,m_2}(17, 20)$ usando o conceito de grafos Purificados.

Se $n = 17$, $m = 20$, então $e = 3$, pois $m = n + e$. O grafo Purificado G'é um grafo 3-regular com 6 vértices e 9 arestas, ilustrado na Figura 5.7(a). Para formar G, vértices de grau 2 são inseridos em suas arestas de maneira uniforme.

Sendo $m = 3es + L \Rightarrow 20 = 9s + L$, $0 \leq L < 9$, encontra-se $s = 2$ e $L = 2$; desta forma são inseridos 2 vértices de grau em 2 arestas e um vértice de grau 2 em 7 arestas ($3e - L$) remanescentes do grafo purificado G'. Veja que o grafo G obtido, Figura 5.7(b), é um grafo subdivisão uniforme do grafo Purificado G', ou seja, $G = G_{su}(G')$. Conforme a Definição 5.2, $n_k = \beta_1 m + \beta_2$ e neste caso $n_k = 11$, $\beta_1 = 1$ e $\beta_2 = 2$.



(a) (b)

Figura 5.7: Grafo Purificado em (a) e em (b) o grafo *G* pertencente a $G_{2,m_2}(17,20)$

Observe que o grafo *G*(17,20), Figura 5.7(b), possui 9 caminhos disjuntos por arestas, sendo dois deles com 2 vértices internos de grau 2 e outros 7 com 1 vértice interno de grau 2.

Observação 5.2.1: No caso que $e = 1$, somente o multigrafo regular com grau 3, com dois vértices pode ser o grafo purificado, veja Figura 5.2. Por construção, pelo menos 1 vértice de grau 2 em cada uma das arestas do grafo purificado *G*' deve ser inserido. Assim, temos $m \geq 5$, já que $m = n + e$, $e = 1$ e $n \geq 4$. Se $n = 4$, a única possibilidade é termos um 4-ciclo mais uma corda *x*. O Teorema 5.2.1 abaixo resume todas estas considerações.

Teorema 5.2.1: Considere $G'_2(n, m)$ como o conjunto de todos os grafos com $\lambda = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor = 2$ e $m = n + e = 3es + L$, onde $0 \leq L \leq 3e$. Então qualquer grafo de $G'_2(n, m)$ com m_2 mínimo deve possuir $n - 2e$ vértices de grau 2 inseridos uniformemente em um grafo purificado regular de grau 3, com $2e$ vértices e $\lambda = 3$ e pertencem a $G_{2,m_2}(n,m)$. Especificamente, cada uma das *L* arestas do grafo purificado possui *s* vértices de grau 2 e cada uma das $3e - L$ arestas remanescentes possui $s - 1$ vértices de grau 2. No caso:

$$m_2 = L\binom{s+1}{2} + (3e - L)\binom{s}{2}.$$

O corolário a seguir é uma conseqüência direta do Teorema 5.2.1.

Corolário 5.2.1: Se um grafo *G* pertencente a $G'_2(n, m)$ é *max* λ *& min* m_λ, então $n - 2e$ é o número mínimo de vértices de grau 2 entre todos os grafos *max* λ de $G'_2(n, m)$.

Prova: De acordo com a prova do Teorema 4.2.1 se G é *max* λ considere a função $2m = n\delta + r$. É fácil ver que o limite inferior para a soma dos graus (que é igual ao dobro do número de arestas) seria dado por $2m \geq p\delta + (n - p)(\delta + 1)$, ou seja, $2m \geq n\delta + n - p$. Fazendo $m = n + e$ e $\delta = 2$, encontramos $p \geq n - 2e$. ■

5.3 Algoritmo para construção de grafos pertencentes a $G_{2,m_2}(n, m)$

Como dito anteriormente, o que desejamos é encontrar grafos em $G_2(n, m)$ que tenham $n - 2e$ vértices de grau 2 e cortes de arestas formados somente por arestas incidentes e por arestas de um mesmo caminho disjunto por arestas. Desta forma, a seguir é descrito um procedimento para construir grafos pertencentes a $G_{2,m_2}(n, m)$.

O Algoritmo 5.3.1 é uma das principais contribuições desta dissertação e usa as idéias descritas em Bauer *et al.* [9] que se baseiam no conceito de distribuição uniforme de vértices de grau 2 em um grafo purificado 3-regular e o clássico conceito de subdivisão de aresta.

Observe que cada caminho disjunto por arestas A_i de um grafo G pertencente a G_{2,m_2} é um subgrafo induzido isomorfo a um caminho P_k. Aplicando-se o conceito de contração por caminho a cada A_i e considerando que $3e$ deve ser o número de arestas do grafo purificado $G' = P(G)$ 3-regular, conclui-se que a quantidade de vértices de G' é igual a $2e$. O exemplo da Figura 5.6 ilustra esta afirmação.

Os dados de entrada do algoritmo são os valores de n, m do grafo G a ser construído. Sabemos que o grafo inicial é o grafo Purificado G' 3-regular com $2e$ vértices e $3e$ arestas. O objetivo é distribuir vértices de grau 2 de forma mais uniforme possível de acordo com a motivação de Bauer e*t al.* [9] e a Definição 5.3, evitando a possibilidade de corte formado por arestas de caminhos disjuntos diferentes. O algoritmo possui os seguintes passos:

Algoritmo 5.3.1: Constrói grafos pertencentes a $G_{2,m_2}(n,m)$.

Entrada: n, m e $e \in \mathbb{N}$, $0 \leq k < n$.

1- Faça

$e = m - n$;

Construa um grafo Purificado 3-regular com $2e$ vértices e $3e$ arestas;

2- Faça

$$k = \left\lfloor \frac{n-2e}{3e} \right\rfloor;$$

3 – Faça

k subdivisões no grafo purificado G';

4 – Faça

$n_k = 2e + 3ke$, e $m_k = (k+1)3e;$

Se ($n_k = n$ e $m_k = m$) então

Fim

Senão

$$L = \left| m - m_k \right|,$$

5 – Insira 1 vértice de grau 2 em L arestas diferentes do grafo corrente.

Fim

Desta forma, observando o desenvolvimento do Algoritmo 5.3.1, são inseridos k vértices de grau 2 em $3e - L$ arestas do grafo Purificado G' e $k + 1$ vértices de grau 2 nas L arestas remanescentes, de acordo com a Definição 5.2. Assim, O grafo G construído sempre tem no mínimo um T_i, conjunto de vértices de grau 2 de cada i

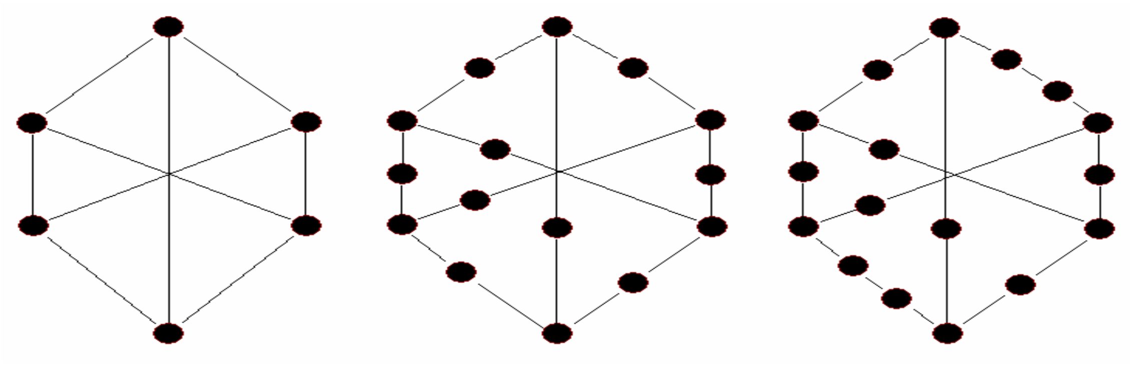
caminho disjunto por aresta, que não é vazio. Portanto, a conectividade de aresta do grafo é 2.

Os dois exemplos a seguir confirmam os procedimentos para construção de grafos pertencentes a $G_{2,m_2}(n, m)$.

Exemplo 5.3.1: Deseja-se construir um grafo *G* com 17 vértices e 20 arestas de forma que ele tenha conectividade máxima de arestas e a menor quantidade de conjunto de cortes de arestas com cardinalidade igual a λ. Como $\lambda = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor = 2$, devemos construir um grafo pertencente a $G_{2,m_2}(17, 20)$ usando o conceito de grafos purificados.

Se $n = 17$, $m = 20$, então $e = 3$, pois $m = n + e$. O grafo purificado *G*' será um grafo 3-regular com 6 ($= 2e$) vértices e 9 ($= 3e$) arestas, ilustrado na Figura 5.8(a).

Do passo 2, $k = 1$. Fazemos 1 subdivisão no grafo Purificado *G*', ilustrado na figura 5.8(b), descrito no passo 1. Do passo 4, $n_1 = 15$ e $m_1 = 18$ que não atendem os valores de *n* e *m* do grafo *G* , por isso, passamos para o passo 5 e encontramos $L = 2$. Inserimos 1 vértice de grau 2 em 2 arestas diferentes na subdivisão do grafo Purificado *G*'. O grafo corrente está na Figura 5.8(c).

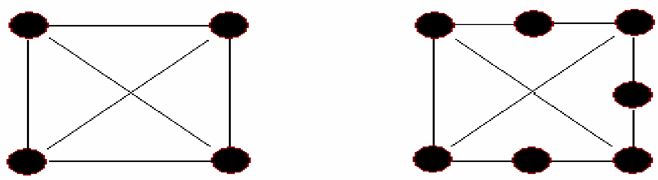


(a) (b) (c)

Figura 5.8: Grafo Purificado *G*' em (a), 1ª subdivisão de *G*' em (b) e em (c) o grafo *G* com 17 vértices e 20 arestas

Exemplo 5.3.2: Deseja-se construir um grafo *G* com 7 vértices e 9 arestas de forma que ele tenha conectividade máxima de arestas e a menor quantidade de conjunto de cortes de arestas com cardinalidade igual a λ. Como $\lambda = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor = 2$, deve-se construir um grafo pertencente a $G_{2,m_2}(7,9)$ usando o conceito de grafos purificados.

Se $n = 7$, $m = 9$, então $e = 2$, pois $m = n + e$. O grafo purificado será um grafo 3-regular com 4 vértices e 6 arestas, ilustrado na Figura 5.9(a). Este grafo é construído nos Passos 4 e 5 do Algoritmo 5.3.1, onde é inserido 1 vértice de grau 2 em $m - 3e$ ($9 - 6 = 3$) arestas diferentes do grafo Purificado $G'(4, 6)$ e construímos o grafo da Figura 5.9(b).



(a) (b)

Figura 5.9: Grafo Purificado *G'* em (a), e em (b) o grafo *G* com 7 vértices e 9 arestas

Veja que com a inserção uniforme de vértices de grau 2 no grafo Purificado *G'* 3-regular o grafo *G* possui $n - 2e$ vértices de grau 2 e os conjuntos de cortes com cardinalidade igual a 2 são formados por pares de um mesmo caminho disjunto, com isso a remoção de 2 arestas de *G*, cada uma de caminhos disjuntos diferentes, não o desconectam.

5.4 - Grafos *super-λ* em $G_2(n,m)$

O conceito de grafos s*uper-λ* foi inicialmente usado nesta dissertação para encontrarmos grafos *max λ* & *min* m_λ quando $\lambda = 3$.

A seção precedente foi motivada pela observação que para certos valores de n e m da família $G_2(n,m)$ grafos *super*-λ não existem. Veja o caso dos ciclos com n vértices, C_n, e de alguns grafos construídos a partir de uma subdivisão uniforme de arestas de grafos purificados, como o grafo da Figura 5.5(b). Desta forma, foi apresentada uma alternativa para resolvemos o problema de encontrarmos grafos *max* λ & *min* m_λ , quando $\lambda = 2$. Todavia, a família $G_2(n,m)$ não é isenta de grafos *super*-λ. Além disso, quando tais grafos possuem número mínimo de vértices de grau 2 podemos dizer que são grafos *max* λ & *min* m_λ , para $\lambda = 2$.

Teorema 5.4.1: Seja G um grafo com n vértices e m arestas tal que $G \in G_2(n,m)$ e G é super- λ. Então, $m \geq 6n/5$. Além disso, todo grafo da família $G_{2,m_2}(n,m)$ é *super*-λ quando $m \geq 6n/5$.

Prova: Considere $G \in G_2(n,m)$**.** Por hipótese, G é *super*-λ. Assim, G não pode conter vértices adjacentes de grau 2. Caso isso ocorra, o grafo teria um corte não trivial. Portanto, $m \geq 2p$, onde p representa o número de vértices de grau 2. Fazendo $2m \geq p\delta + (n-p)(\delta+1)$ e substituindo δ por 2, chega-se a seguinte expressão:

$$2m \geq 2p + 3(n-p) = 2p + 3n - 3p = 3n - p.$$

Logo, $2m \geq 3n - p$. Mas como $m \geq 2p$, então $m \geq 6n/5$. A primeira parte do teorema está provada.

Considerando agora qualquer grafo pertencente a $G_{2,m_2}(n,m)$. Na seção precedente vimos que tais grafos são construídos a partir de um grafo Purificado 3-regular e que $m = n + e = 3es + L$. Se $m \geq 6n/5$, então $n + e = m \geq 6n/5$, desde modo $5e \geq n$. Isto implica que $m = n + e \leq 6e$.

Seja n_k o número de operações de subdivisão de arestas a serem feitas em um grafo G com n vértices e m arestas. Se $n_k \leq m$, n_k arestas são subdivididas, ou seja, é inserido um vértice de grau 2 em cada uma das n_k arestas. Como o grafo G a ser subdividido é um grafo purificado 3–regular com $2e$-vértices e $3e$-arestas, $n_k \leq 3e$. Portanto, G possui no máximo $5e$ vértices e $6e$ arestas. Em qualquer caso, cada aresta do purificado recebe no máximo um vértice de grau 2 e como o grafo purificado tem λ = 3, o grafo G tem sua conectividade de aresta é $\lambda(G) = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor$ e o número de conjunto de cortes de arestas $m_\lambda(G)$ de ordem λ é igual ao número de vértices de grau λ, $m_\lambda(G)$ = $p_\lambda(G)$. Sendo assim, o grafo G é s*uper-λ*. ■

Observe o grafo de Harary do tipo $H_2(1)$ ilustrado na Figura 5.10 pertencente a $G_2(n, m)$ com $m \geq 6n/5$. Veja que não podemos afirmar que um grafo de Harary do tipo $H_2(1)$ é *super-λ* apenas pelo fato de $m \geq 6n/5$. Porém, é possível construir grafos $H_2(1)$ *super-λ* e que, além disso, pertencem a $G_{2,m_2}(n, m)$. Tais condições são caracterizadas na próxima seção.

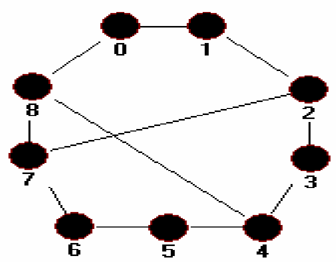


Figura 5.10: Grafo $H_2(1)$ com $m \geq 6n/5$ que não é *super-λ*.

5.5 Grafos de Harary super-λ para $\lambda = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor = 2$

No início deste capítulo foi dito que para certos valores de n e m na família $G_2(n, m)$ não existem grafos de Harary super-λ. Conclui-se que sob certas condições é possível encontrá-los. Nesta seção, além de exibirmos essas condições, também apresentamos uma modificação no procedimento para construção de grafos de Harary do tipo $H_2(1)$ para que eles sejam super-λ pertencentes a $G_{2,m_2}(n,m)$. Esta família é caracterizada no seguinte teorema:

Teorema 5.5.5: A condição necessária para $G_2(n,m)$ conter um grafo $H_2(1)$ *super-*λ é $m \geq 5n/4$. Além disso, existe pelo menos um grafo $H_2(1)$ *super-*λ em $G_2(n,m)$ com a quantidade de vértices de grau 2 igual a $n - 2e$ quando $m \geq 5n/4$.

Prova: Suponha um grafo de Harary $G(n, m)$ do tipo $H_2(q)$ que seja *super-*λ e classifique os seus vértices de 0 até n-1. Como já mencionado este grafo não pode ter vértices adjacentes de grau 2, se o vértice i tem grau 2, o vértice i+1 terá no mínimo grau 3. Assim, se existem t vértices de grau 2, não podem existir menos do que t vértices de grau no mínimo 3. Isto força que o número de vértices de grau 3 ou mais será no mínimo igual a $n/2$. Sendo p o número de vértices de grau igual a 2, então:

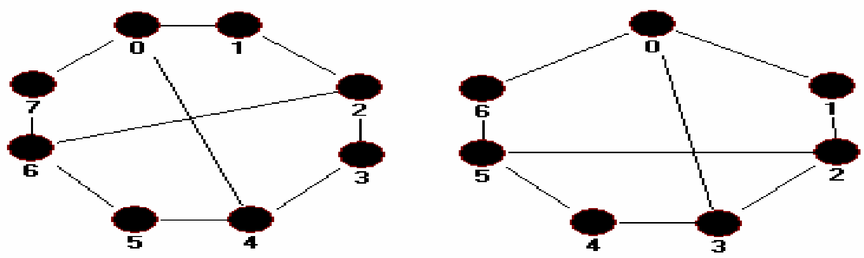
$$2m \geq p\delta + (n-p)\,(\delta+1) \geq 2\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor + 3\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor = \lfloor \tfrac{5n}{2} \rfloor.$$

Assim, $2m \geq \lfloor \frac{5n}{2} \rfloor = m \geq 5n / 4$ e a primeira parte do teorema está provada.

Note que o algoritmo de Hakimi nem sempre constrói um grafo $H_2(1)$ *super-*λ quando $m \geq 5n/4$, reveja Seção 2.3. No procedimento de Bauer *et al.* [9] para a construção de grafos $H_2(1)$ tem como subgrafo gerador um n-ciclo, onde são introduzidas cordas de maneira aleatória para formá-los. Assim, uma escolha cuidadosa na introdução destas cordas pode produzir grafos $H_2(1)$ com mínimo m_2 e que são *super-λ*, quando $m \geq 5n/4$. A construção é feita de duas formas, uma quando n par e a outra quando n ímpar.

Caso 1: n par: Os vértices do ciclo original são classificados de 0 a n-1 e adicione as arestas $\{0, n/2\}$, $\{2, 2 + n/2\}$,..., $\{2i, 2i + n/2\}$ onde $2i < n/2$, Figura 5.11(a);

Caso 2: n ímpar: Os vértices do ciclo original são classificados de 0 a n-1 e adicione as arestas $\{0, \lfloor n/2 \rfloor\}$, $\{2, 2 + \lfloor n/2 \rfloor\}$,..., $\{2i, 2i + \lfloor n/2 \rfloor\}$, onde i é máximo tal que $2i < \lfloor n/2 \rfloor$ se $\lfloor n/2 \rfloor$ for ímpar e $2i = \lfloor n/2 \rfloor$ se $\lfloor n/2 \rfloor$ for par, Figura 5.11(b).



(a) (b)

Figura 5.11: Grafos de Harary pertencentes a $G_{2,m_2}(n, m)$

com n par (a) e n ímpar(b).

Para provar que esses grafos são *super-λ*, utilizamos mais uma vez a Proposição 4.1.1. Tal proposição diz que num dado grafo G tal que $\lambda(G) = k(G)$, se U é um conjunto formado por uma quantidade mínima de arestas de G cuja remoção o torna desconexo, então U é constituído somente por arestas incidentes ou por arestas independentes. Suponha que a remoção de duas arestas independentes desconecta G. Para que isto ocorra estas arestas devem desconectar o n-ciclo, que é um subgrafo gerador. Este corte deixará duas componentes P_1 *e* P_2 que são da forma $(i, i + 1 (\text{mod } n))$ e $(j, j + 1 (\text{mod } n))$, conforme ilustrado na Figura 5.12. É fácil ver que cada componente deve ter no mínimo 2 vértices. Considere, sem perda de generalidades, que $P_1 < P_2$. Por construção, um vértice i é adjacente a um vértice $i + k_r$ reduzidos a módulo n, onde k_r é igual a $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, reveja definição de *grafos Circulantes* no Capítulo 2. Desta forma o vértice $i + k_r$ pertence a componente P_2. Porém, isto é uma contradição, já que os componentes P_1 *e* P_2 deveriam estar separados. Portanto, os cortes com uma quantidade mínima de arestas são formados por arestas incidentes a um vértice. Assim, o grafo construído conforme o procedimento apresentado é *super-λ*. Para completar a prova do teorema é fácil ver que tais cortes possuem um número mínimo de vértices com grau 2. Logo, tais grafos pertencem a $G_{2,m_2}(n, m)$. ■

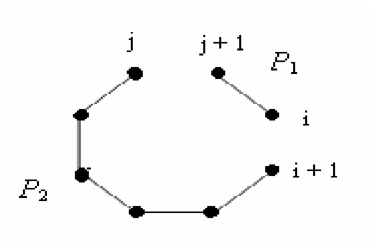


Figura 5.12: Componentes desconexas P_1 *e* P_2 do subgrafo gerador de G

Observação 5.5.1: Ao contrário do caso em que $\frac{2m}{n} \geq 3$, onde todo grafo de Harary $H_2(q)$ é *super-λ*, verificamos que, para $m \geq 5n/4$ e $\lambda = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor = 2$, nem todo grafo $H_2(1)$ é *super-λ*. Veja o grafo $H_2(1)$ com 10 vértices e 13 arestas, construído pelo algoritmo de Hakimi, ilustrado na Figura 5.13.

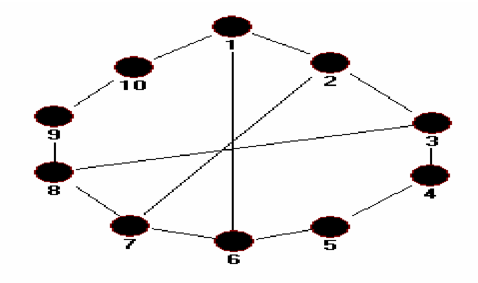


Figura 5.13: Grafo $H_2(1)$ com $m \geq 5n/4$ que não é *super-λ*

Capítulo 6

Grafos *max λ & min* $m_{\lambda+1}$

Dando prosseguimento ao trabalho de Bauer *et al.* [9], Wang e Zhang [75] apresentaram o conceito de grafos *max λ & min* $m_{\lambda+1}$. Tais grafos formam uma subclasse $G_\lambda(n,m)$ cujos elementos possuem a menor quantidade de cortes de arestas com cardinalidade igual a $\lambda + 1$ dentre todos os grafos com m arestas e n vértices. Um grafo desta classe é chamado de *max λ & min* $m_{\lambda+1}$ e denotado por $G_{\lambda\ ,m_{\lambda+1}}(n,m)$.

A importância do estudo desta classe está no fato de que para todo $G \in G(n, m)$, $m_i(G) = 0$, para $i < \lambda$, e $m_i(G) = \binom{m}{i}$, para $i > m - n + 1$. Desta forma, os valores de m_i fornecem uma importante regra na comparação de confiabilidade entre redes, pois uma rede modelada por um grafo que seja *max λ & min* m_λ e *max λ & min* $m_{\lambda+1}$ é mais confiável que uma rede modelada por um grafo que seja apenas *max λ & min* m_λ.

Neste capítulo, dividido em duas seções, apresentamos a solução completa para o problema de construção de grafos com valor mínimo possível de $m_{\lambda+1}(G)$, ou simplesmente $m_{\lambda+1}$. A seção 6.1 mostra que todo grafo de Harary *max λ & min* m_λ do tipo $H_2(q)$ e $H_3(q)$ é *max λ & min* $m_{\lambda+1}$, quando $\lambda = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor \geq 4$. Na seção 6.2, é apresentada uma família de grafos com $\lambda = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor = 3$ e cintura igual a 6 pertencentes ou a $G_{\lambda\ ,m_{\lambda+1}}(n,m)$ ou a $G_{\lambda\ ,m_\lambda}(n,m)$. Isto permite que, para $0 < \rho \leq \rho_0$, o cálculo de *P(G; ρ)* para estes grafos pode ser reduzida à expressão apresentada em (3.3).

O lema a seguir, cuja prova pode ser encontrada em Wang e Zhang [75], é a base deste capítulo.

Lema 6.1: Seja $G \in G(n, m)$ cuja conectividade de arestas é igual à conectividade de vértices, $\lambda(G) = k(G)$. Se $U \subset G$ é um conjunto de corte de arestas com cardinalidade igual a $\lambda + 1$ então U satisfaz uma das seguintes condições: (i) U contém um conjunto de arestas incidentes a um vértice; (ii) todas as arestas de U são independentes ou, finalmente, (iii) U é formado por arestas quase independentes.

Observação 6.1: No caso em que $\lambda = 3$ existe a possibilidade de um conjunto de corte formado por quatro arestas isolar K_2.

6.1 Grafos $G_{\lambda, m_{\lambda+1}}(n, m)$ quando $\lambda = \frac{2m}{n} \geq 4$

Nesta seção apresentamos a prova de que se G é um grafo H_2(q) ou H_3(q) que pertence a $G_{\lambda\ , m_\lambda}(n, m)$ então G pertence também a $G_{\lambda\ , m_{\lambda+1}}(n, m)$.

Observação 6.1.1: Se um grafo G é *max* λ então $m_{\lambda+1}(G) \geq (m-\lambda)n_\lambda + n_{\lambda+1}$, onde n_λ representa o número de vértices de G com grau igual à λ. Nesta expressão o valor de $(m-\lambda)n_\lambda$ representa a quantidade de cortes formados pelas arestas incidentes aos vértices com grau $\delta = \lambda$ mais uma aresta qualquer e $n_{\lambda+1}$ a quantidade de cortes de arestas incidentes aos vértices com grau igual a $\lambda + 1$.

O grafo $G(7, 17)$ da Figura 6.1 é usado para ilustrar o que foi dito. Observe que $\lambda = 4$, $n_\lambda = 1$ e $n_{\lambda+1} = 6$. Substituindo estes valores na expressão dada na Observação 6.1.1, encontramos $m_{\lambda+1}(G) = 19$. Vale ressaltar que a inequação é satisfeita na igualdade porque neste grafo não existem cortes de arestas do tipo (ii), como dado no Lema 6.1.

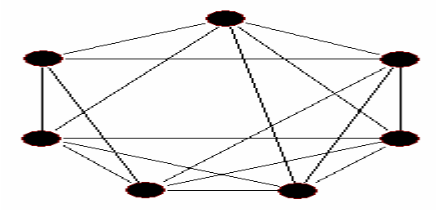


Figura 6.1: Grafo com 19 cortes de arestas com cardinalidade igual a 5.

Como resultado da Observação 6.1.1, é fácil ver que entre todos os grafos *max* λ, para $\lambda \geq 4$, o valor mínimo para $m_{\lambda+1}$ é igual a $(m-\lambda)n_\lambda + n_{\lambda+1}$. Concluímos que a quantidade de vértices com grau $\delta = \lambda$ é preponderante para encontrarmos $m_{\lambda+1}$. Desta forma, entre todos os grafos com máxima conectividade de aresta, aquele com uma quantidade mínima de cortes de arestas com cardinalidade $\lambda + 1$ deve ter o menor número de vértices com grau mínimo δ.

Teorema 6.1.1: Para todo n e m tais que $\lambda = \frac{2m}{n} \geq 4$, os Grafos de Harary do tipo $H_2(q)$ ou $H_3(q)$ não possuem qualquer corte formado por arestas quase independentes com cardinalidade igual a $\lambda + 1$.

Prova: Todo grafo de Harary G do tipo $H_2(q)$ ou $H_3(q)$ tem, como subgrafo gerador, um grafo de Harary do tipo $H_0(2)$ ou $H_1(2)$, quando $\lambda = \frac{2m}{n} \geq 4$. Para efeito de simplificação, os grafos $H_2(q)$ ou $H_3(q)$ serão denotados por $H(n, m)$. Suponha por contradição, que U seja um corte de arestas quase independentes de um grafo $H(n, m)$ cuja cardinalidade é $\lambda + 1$, ou seja, U deve conter λ arestas independentes entre si, conforme a Figura 6.2. Assim, U deve desconectar o subgrafo gerador $H_0(2)$ ou $H_1(2)$. Da prova do Teorema 4.1.1, sabemos que para desconectar $H_0(2)$ ou $H_1(2)$, uma das arestas de U deve estar no ciclo. Sem perda de generalidade, uma dessas arestas é da forma $(i, i + 1)$ e uma outra é uma aresta do triângulo da forma $(i, i + 2)$, de modo que i fica em uma componente de G - U e $i + 1$ e $i + 2$ em outra. Lembrando que se $\lambda[H_0(2)] = 4$, deve existir um outro par de arestas de $H_0(2)$, ambas pertencentes a U. Por um argumento similar, temos que uma destas arestas também pertence a um triângulo. Portanto, U deve conter pelo menos dois pares de arestas adjacentes de $H_0(2)$ e, com isso, não é possível formar um conjunto de corte com no mínimo λ arestas independentes. Pelo Lema 6.1, só é possível ter conjuntos de corte ou formados por arestas incidentes ou que englobam arestas incidentes. ■

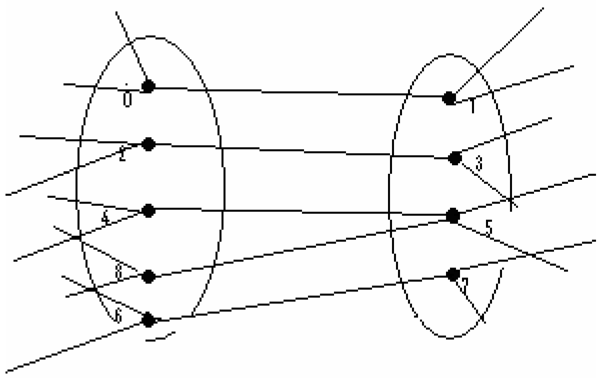


Figura 6.2: Arestas quase independentes pertencentes ao corte U

Teorema 6.1.2: Para todo natural n e m tais que $\lambda = \frac{2m}{n} \geq 4$, os grafos de Harary do tipo $H_2(q)$ ou $H_3(q)$ são grafos *max* λ & *min* $m_{\lambda+1}$. Além disso, todo grafo $G \in G_{\lambda, m_\lambda}(n, m)$ é tal que, para $\lambda \geq 4$, $min\ m_{\lambda+1}(G) = [m - (\lambda + 1)]\ min\ m_\lambda + n$.

Prova: Vamos denotar um grafo do tipo $H_2(q)$ ou $H_3(q)$ por $H(n, m)$. Este é *max* λ & *min* m_λ e, de acordo com o Teorema 6.1.1, não possui qualquer corte de aresta quase independente. Com isso, $m_{\lambda+1}(H) = (m - \lambda)\, n_\lambda + n_{\lambda+1}$. É fácil ver que $n_\lambda = min\ m_\lambda$ e $n_{\lambda+1} = n - min\ m_\lambda$. Além disso, se um grafo G é *max* λ então $m_{\lambda+1}(G) \geq (m-\lambda)\, n_\lambda + n_{\lambda+1}$.

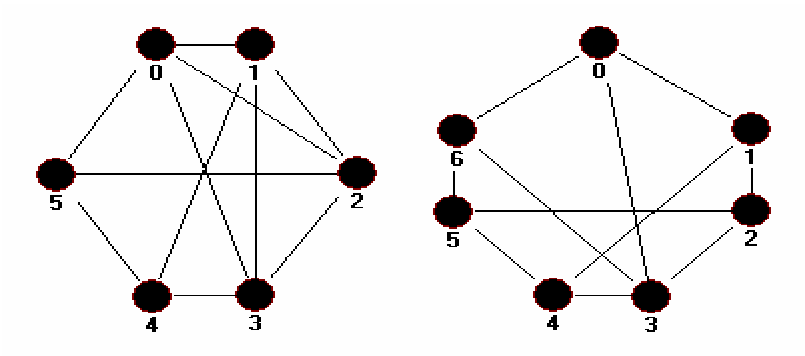
Daí segue-se que *min* $m_{\lambda+1}(G) = m_{\lambda+1}(H) = (m - \lambda)$ *min* $m_{\lambda} + n$ - *min* m_{λ}. Isto mostra que o grafo $H(n, m)$ é *max* λ & *min* $m_{\lambda+1}$. ■

Corolário 6.1.1: Todo grafo *max* λ & *min* m_{λ} tal que $k = \lambda = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor \geq 4$ sem qualquer corte de arestas independentes ou quase independentes e que tenha cardinalidade igual a $(\lambda + 1)$ é *max* λ & *min* $m_{\lambda+1}$.

6.2 Grafos $G_{\lambda, m_{\lambda+1}}(n, m)$ quando $\lambda = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor = 3$

Segundo Wang e Zhang [75], em todo grafo G tal que $k = \lambda = 3$, qualquer corte de arestas U com cardinalidade igual a 4 é um conjunto com uma das seguintes características: (i) U contém um conjunto de arestas incidentes a um vértice; (ii) U é um conjunto de corte restrito sempre formado por dois pares de arestas adjacentes que isolam K_2; ou finalmente, (iii) U é um conjunto formado por arestas independentes ou quase independentes.

O grafo da Figura 6.3(a) serve de exemplo para as duas primeiras classes e o grafo da Figura 6.3(b) serve de exemplo para a terceira classe de corte de arestas.



(a) $n = 6$ e $m = 11$ (b) $n = 7$ e $m = 11$

Figura 6.3: Grafos com cortes de arestas com cardinalidade igual a $\lambda + 1$.

No grafo da Figura 6.3(a) os conjuntos de arestas [(0,5); (0,3); (0,2); (0,1)], [(5,0); (5,2); (5,4); (1,3)] e [(0,5); (2,5); (1,4); (4,3)] são exemplos de cortes respectivamente formados ou por arestas incidentes, ou por aquelas que englobam um subconjunto de arestas incidentes ou é um conjunto de corte restrito que isola K_2. O grafo da Figura 6.3(b) é um grafo de Harary do tipo $H_1(1)$ e possui um corte de arestas quase independentes com cardinalidade 4 igual a [(0,1); (2,3); (3,4); (5,6)]. No caso em que $\lambda = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor = 3$, tem-se:

$$m_{\lambda+1}(G) \geq (m-\lambda)n_\lambda + n_{\lambda+1} + e_3 \, , \tag{6.2.1}$$

onde e_3 é a quantidade de conjuntos de corte restrito que isolam K_2, ou seja, e_3 é a quantidade de arestas com ambos os vértices de grau 3. Segundo Wang e Zhang [75], e como resultado de (6.2.1), o menor valor para $m_{\lambda+1}(G) = m_4$ em $G_3(n,m)$ é

$$(m-4)min\ m_\lambda + n + min\ e_3 \, . \tag{6.2.2}$$

Portanto, entre todos os grafos *max* λ, aquele com $m_{\lambda+1}$ igual a (6.2.2) pertence a $G_{3,m_4}(n,m)$.

Observando a Figura 6.3(b), que representa um grafo $H_1(1)$, quando $\lambda = 3$. Note que este grafo contém cortes de arestas quase independentes de ordem 4 e cintura igual a 3. Portanto, o problema de determinar grafos com mínimo m_4 consiste em encontrar grafos *max* λ que não possuam cortes de arestas quase independentes. Para isso, não podem ter cintura 3.

O número mínimo de vértices de um grafo G, com grau mínimo δ e cintura g conhecidos é determinado pelo Teorema 6.2.1 abaixo. No nosso caso específico sabemos que δ deve ser igual a 3 e que a cintura g deve ser maior ou igual a 4.

Teorema 6.2.1 (Ballobás [8]): O número mínimo de vértices, *n(g,n)*, de um grafo G com grau mínimo δ e valor de cintura g conhecidos é determinado por:

$$n(g,\delta) \geq \begin{cases} 1+\delta[\frac{(\delta-1)^{\frac{(g-1)}{2}}-1}{\delta-2}], \text{se } g \text{ } impar \\ \\ \frac{(\delta-1)^{\frac{g}{2}}-1}{\delta-2}, \text{se } g \text{ } par \end{cases},$$

Note que para um grafo com $\delta = 3$ e $g = 5$ o grafo G deve ter no mínimo 10 vértices.

Usando este teorema e o conceito de grafos de Harary, Wang e Zhang [75] conseguiram construir uma classe de grafos *max* λ sem cortes de arestas independentes ou quase independentes para $n \geq 13$, denotada por $H'(n,m)$. Tais grafos são formados a partir de grafos com $k = \lambda = \delta = 3$ que têm exatamente $\lceil \frac{kn}{2} \rceil$ arestas e são denotados respectivamente por H_0', H_1'e H_2'. Abaixo, apresentamos o procedimento de construção destes grafos conforme descrito por Wang e Zhang [75]:

Caso 1: Construção do grafo H_0' para $n \geq 14$ e $2m = 3n$:

A construção começa por um *n-ciclo* com os vértices numerados de 0 a n-1 ligando os vértices i e $i + 5$ (mod n), para i par. Veja que H_0' é um cubo bipartido com cintura igual a 6. A Figura 6.4 (b) ilustra um grafo H_0' com $n = 14$ e $m = 21$.

Caso 2: Construção do grafo H_1'para $n = 4y + 1 \geq 13$ e $2m = 3n + 1$:

O grafo H_1' é obtido de H_0'[n + 1, (3n + 3) /2] pela contração de uma aresta, (0, n), sobre o n+1-*ciclo* de H_0'. Claramente, H_1' tem somente um vértice com grau 4 e os demais com grau 3 e cintura igual a 5. A Figura 6.4 (a) ilustra um grafo H_1' com $n = 13$ e $m = 20$.

Caso 3: Construção de H_2' para $n = 4y + 3$, y $\geq$ 3, e $2m = 3n + 1$:

Este grafo é obtido de H_0'[n-1, (3n-3) /2] pela inserção de um vértice na aresta [(n-1) /2, (n+1) /2] e conectando este vértice e o vértice 0. Quando $n \geq 19$, H_2' tem cintura 5. Todos os ciclos de comprimento 5 em H_2' possuem o vértice 0 com grau igual a 4. Somente quando $n = 15$, H_2' possui cintura 4 com um único ciclo de comprimento 4. O vértice inserido deve ser numerado como $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. A Figura 6.4 (c) ilustra um grafo H_2' com $n = 15$ e $m = 23$.

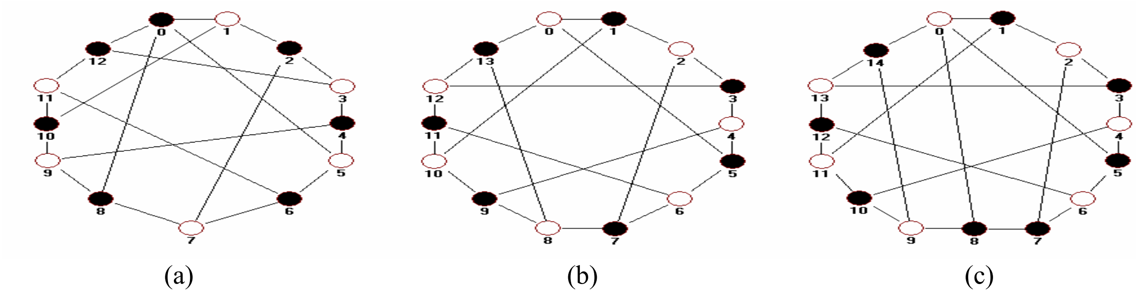


Figura 6.4: Grafos H_1' em (a), H_0 ' em (b), H_2' em (c).

Generalizando estes resultados, considere a expressão $2m = 3n + r$ ($n \geq 13$, $0 \leq r \leq n$-1), para n e m conhecidos. O grafo H' é formado de G pela conexão aleatória de $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ pares de vértices não adjacentes com grau 3 em G, onde G é H_0', se n par; G é H_1', se $n = 4y + 1$ ou G é H_2', se $n = 4y + 3$, para $y \geq 3$. É fácil ver que H' tem com subgrafo gerador ou H_0', ou H_1' ou H_2' e, dado que $r < n$, ao adicionarmos no máximo $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ arestas a um destes grafos, o valor do grau mínimo, no caso igual a 3, não se altera. No caso particular $H' = H_0'$, se n par e $r = 0$, $H' = H_1'$ e H_2', se n ímpar e $r = 1$.

Os vértices dos grafos da Figura 6.4, constituídos por círculos brancos, representam os conjuntos independentes máximos destes grafos. As características dos grafos H' estão contidas no Teorema 6.2.1 a seguir.

Teorema 6.2.2: Dados n ($n \geq 13$) e m inteiros positivos com $\lfloor \frac{2m}{n} \rfloor = 3$, o grafo $H'(n, m)$ tem as seguintes propriedades:

(i) G não contém conjuntos de corte de arestas independentes com cardinalidade igual a 3, nem conjuntos de corte de arestas quase independentes com cardinalidade igual a 4;

(ii) $k(H') = \lambda(H') = \delta(H')$;

(iii) $\alpha(H') = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Prova: Para verificar que a propriedade (i) é verdadeira basta fazer a prova para os grafos $H_i'(n, m)$, quando $i = 0, 1, 2$, já que eles são subgrafos geradores dos grafos $H'(n, m)$. Considere que H'_0 tem um conjunto de cortes de arestas U, tal que os componentes conexos G_1 e G_2 de H'_0 - U tem $|G_1| \geq 3$. Se as arestas que compõem o componente mínimo G_1 não possuir um ciclo acarreta que $|U| \geq 5$, ou senão, G_1 contém um ciclo e, assim, $|U| \geq 6$. Conseqüentemente, sem perda de generalidades deve-se supor que $V(G_1) = 0, 1, ..., i$ ($5 \leq i \leq n/2$) e, então, U deve conter alguma corda que é incidente aos vértices 1, 3, e $i - 1$, $i - 3$, quando i é ímpar, ou i, $i - 2$, quando i é par. Além disso, U ainda contém as arestas $(0, n\text{-}1)$ e $(i, i+1)$ do *n-ciclo*. Segue-se, então, que $|U| \geq 6$, ou seja, H'_0 não contém qualquer corte de arestas independentes com cardinalidade igual a 3 ou qualquer corte de arestas quase independentes. Quando $n \geq 19$, a prova para H'_1 e H'_2 é feita de forma similar. Para H'_2 quando $n = 15$, observe que o único 4-*ciclo* e todos 5-*ciclos* contem o vértice 0 com grau 4. Desta forma, facilmente pode-se ver que se um conjunto de corte de arestas U, tal que o componente mínimo G_1 de H'_2 – U tem $|G_1| \geq 4$, então G_1 contém ciclos e $|U| \geq 5$ e conseqüentemente a propriedade (i) é verdadeira.

Como resultado de (i), H_i '(n, m) para $i = 0, 1, 2$ não contém qualquer conjunto de corte de arestas com cardinalidade 2 e como $k(H'_t) \leq \lambda(H'_t) \leq \delta(H'_t)$ e $\delta(H'_t) = 3$ chega-se a $3 \leq \lambda(H'_i) \leq \delta(H'_i) = 3$, então $\lambda(H'_i) = 3$, para $i = 0, 1, 2$ e do Teorema 2.1 chega-se a $k(H'_i) = \lambda(H'_i) = 3$, para $i = 0, 1, 2$. Conseqüentemente, $3 = k(H'_i) \leq \lambda(H'_i) \leq \delta(H'_i) = 3$ implicando que cada $H'(n, m)$ é *max* λ.

Para provar a propriedade (iii), primeiro observe que os vértices pares e os ímpares formam uma divisão de vértices em H_0'; assim, H_0' é um cubo bipartido. Os vértices rotulados pares ou ímpares formam um conjunto independente máximo de H_0' tal que $\alpha\ (H'_0) = n/2$. Pela mesma razão, os conjuntos de vértices rotulados ímpares em H_1' e $[0, 2,..., (n\text{-}3)/2, (n+3)/2,..., (n\text{-}2)]$ em H_2' formam conjuntos independentes maximais de H_1' e H_2', respectivamente e $\alpha\ (H'_i) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ para $i = 1, 2$. ■

O seguinte corolário é conseqüência direta do Teorema 6.2.1 e da Proposição 4.1.1:

Corolário 6.2.1: Sejam n e m inteiros positivos tal que $\lambda = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor = 3$ e $n \geq 13$, o grafo $H'(n, m)$ pertence a $G_{\lambda, m_\lambda}(n, m)$.

De acordo com a expressão (6.2.2) os grafos com um valor mínimo para $m_{\lambda+1}$ devem possuir a menor quantidade de cortes restritos por aresta, ou seja, *min* e_3. Esta questão é resolvida com o Teorema 6.2.3.

Teorema 6.2.3: Se n e m inteiros positivos com $\lambda = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor = 3$ e $n \geq 13$, existe pelo menos um $H'(n, m)$ que é *max* λ & *min* $m_{\lambda+1}$. Além disso, para qualquer grafo G pertencente a $G_\lambda(n, m)$, o menor valor para a quantidade de cortes de arestas com cardinalidade igual a $\lambda + 1$, ou seja, *min* $m_{\lambda+1}(G)$, deve ser igual a $(m - 4)$ *min* $m_\lambda + n + $ *min* e_3.

Prova: Primeiro devemos encontrar um $H'(n, m)$ com e_3 mínimo. Este grafo é formado a partir de inserções adequadas de arestas em um grafo H'_i $(i = 0, 1, 2)$ que são *max* λ. Desta forma, $2m = 3n + r$ ($n \geq 13$ e $0 \leq r \leq n - 1$). Além disso, pelo Teorema 6.2.2 o grafo H'_i $(i = 0, 1, 2)$ possui apenas cortes de arestas incidentes a um vértice com cardinalidade 3 e sabemos que o número mínimo de vértices de grau $\delta = \lambda$ em um grafo *max* λ é igual a $n - r$. Sendo assim, podemos substituir em (6.2.2) *min* m_λ por $n - r$, chegando a $m_{\lambda+1}(H') = (m - 4)(n - r) + n + $ *min* e_3. Por isso, os grafos $H'(n, m)$ são construídos de modo que o número de vértices com grau $\delta = \lambda$ é igual a $n - r$. Conseqüentemente e_3 também é minimizado. A construção é como se segue:

Caso 1: $n \equiv 0$ (mod 4), portanto $n \geq 16$. Neste caso, $n/2$ e r são pares. O grafo H' consiste de H_0' com as cordas ($i, i + n/2$)(mod n), para $i = 2, 4,..., r$, para $r \leq n/2$, e para $r \geq n/2$, são introduzidas $n/4$ cordas, da mesma forma anterior, além de $r/2 - n/4$ arestas obtidas pela conexão de pares de vértices rotulados ímpares em H_0'.

Observe que no grafo H_0', $m(H_0') = 3n(H_0')/2$. No grafo H', $2m(H') = 3n(H_0') + r$. Podemos reescrever esta igualdade da seguinte forma: $m(H') = 3n(H_0')/2 + r/2$, ou seja, $m(H') = m(H_0') + r/2$. É fácil verificar que $e_3(H_0')$ é igual a $m(H_0')$. Como são introduzidas cordas no grafo H_0' para formar o grafo H', concluímos que o valor de $e_3(H') = m(H_0') - 3r$. Portanto, podemos dizer $e_3(H') = m(H') - r/2 - 3r$ que é igual a $m(H') - 7r/2$. Sintetizando estas observações temos:

$$e_3(H') = \begin{cases} m - \frac{7r}{2}, \text{para } 0 \leq r < \frac{n}{2} \\ 0, \text{para } r \geq \frac{n}{2} \end{cases}.$$

O grafo da Figura 6.5 abaixo com 16 vértices, 27 arestas e r igual a 6 ilustra a construção de um grafo H' para este caso. Veja que este grafo possui exatamente r vértices de grau 4 e o demais grau 3.

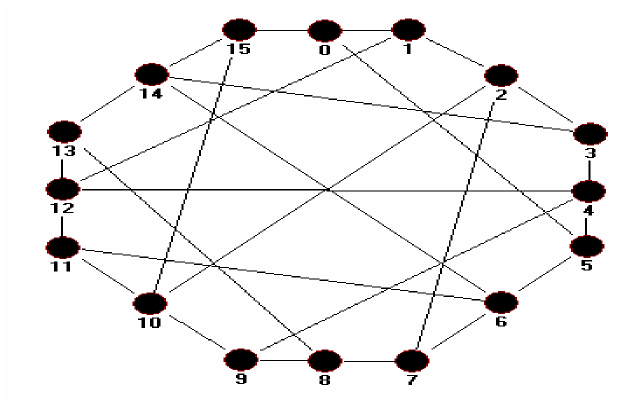


Figura 6.5: Grafo H'(16, 27) com 6 (= r)vértices de grau 4 e $e_3 = 6$.

Caso 2: $n \equiv 2 \pmod 4$, portanto $n \geq 14$. Neste caso, $n/2$ é ímpar e r é par. O Grafo H' quando $r < n/2$ é formado a partir de H_0' adicionando-se $r/2$ arestas da forma $(i, i\text{-}1 + n/2)$, para $i = 2, 4,..., r$. Quando $r > n/2$, são adicionadas $n/4$ arestas em H_0' da mesma forma anterior. Além dessas arestas, também são adicionadas $r/2 - n/4$ arestas obtidas pela ligação sucessiva dos pares de vértices $(0, n/2)$, e $(i, i + 1 + n/2) \pmod n$, $i < n/2$, sendo i ímpar. A Figura 6.6 ilustra um grafo com 18 vértices 30 arestas e r igual a 6. Usando o mesmo raciocínio para o caso 1, é fácil verificar neste caso que:

$$e_3(H') = \begin{cases} m - \frac{7r}{2}, \text{para } 0 \leq r < \frac{n}{2} \\ 0, \text{para } r > \frac{n}{2} \end{cases}.$$

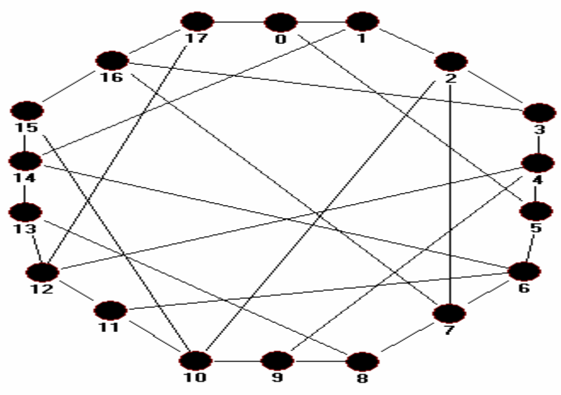


Figura 6.6: Grafo H' (18, 30) com $r = 6$ vértices de grau 4 e $e_3 = 9$.

Caso 3: $n \equiv 1 \pmod 4$, portanto $n \geq 13$. Neste caso, r é ímpar e $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ é par e o conjunto de vértices S = (1, 3,..., n-2) é um conjunto independente maximal de H_1', onde os vértices 1 e 5 são adjacentes ao vértice 0. O Grafo H' é obtido a partir de H_1' mediante 3 condições:

i) Quando $r < n/2$ adicione $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ arestas, formadas pela conexão de $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ pares de vértices de S – (1, 5);

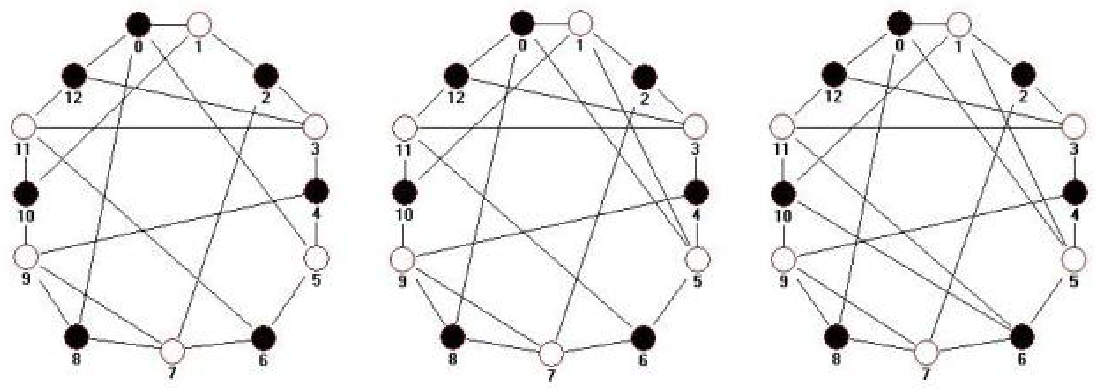
ii) Quando $r = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, além das arestas criadas em (i), os vértices 1 e 5 também são conectados;

iii) Quando $r > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ vértices são conectados da mesma forma que (i), mais $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ arestas pela conexão de pares de vértices de H_1' – S, exceto o vértice 0.

Os grafos da Figura 6.7 ilustram os casos (i) em (a), (ii) em (b) e (iii) em (c).

Lembrando que no grafo H_1', $2m = 3n + 1$, pode-se usar o mesmo raciocínio do Caso 1 para mostrar que para estes grafos:

$$e_3(H') = \begin{cases} m - (1 + \frac{7r}{2}), \text{para } 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \\ 0, \text{para } r > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \end{cases}.$$



(a) (b) (c)

Figura 6.7: Grafos *H'* para $r < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ em (a), $r = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ em (b) e $r > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ em (c).

Caso 4: $n \equiv 3$ (mod 4), portanto $n \geq 15$. Neste caso, r e $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ são ímpares. O conjunto de vértices S = { 0, 2, 4,..., (n - 3)/2, (n + 3)/2,..., n – 4, n-2 } do grafo H_2' é um conjunto independente maximal. O Grafo H' é formado adicionando-se $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ arestas criadas pela conexão sucessiva de pares de vértices em S – { 0 } e pares de vértices de H_2' – S, se necessário. O grafo da Figura 6.8 ilustra um grafo com Veja que e_3 (H') = m – (1 - 7r) / 2, para $1 \leq r < n/2$ e 0 para $r > n/2$.

Da mesma forma que o Caso 3, é fácil verificar para este caso que:

$$e_3(H') = \begin{cases} m - (1 + \frac{7r}{2}), \text{para } 1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ 0, \text{para } r > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{cases}.$$

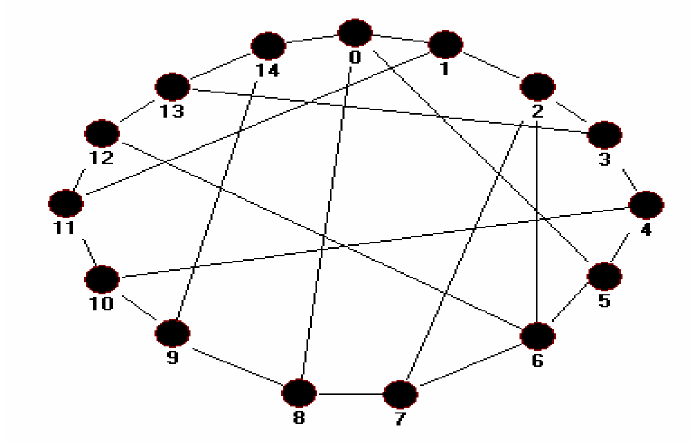


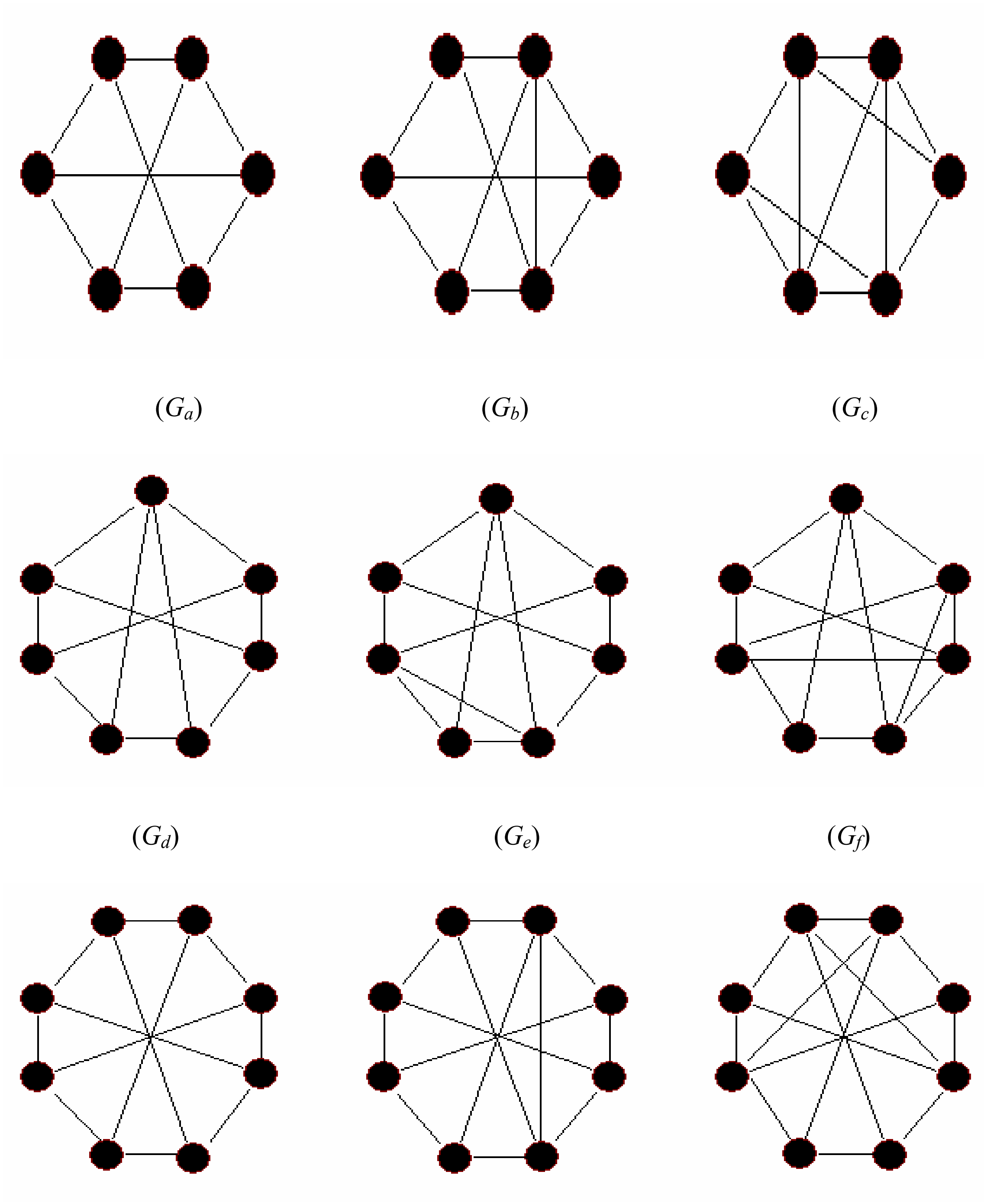
Figura 6.8: Grafo H' (15, 24) com $r = 4$ vértices de grau 4 e $e_3 = 9$.

Para qualquer valor de n e m com $\lfloor \frac{2m}{n} \rfloor = 3$ e $n \geq 13$, se um grafo conexo contém $n - r$ vértices de grau 3 e r vértices de grau 4 com no mínimo $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ pares de vértices adjacentes com grau 4 pode-se dizer que:

O número máximo de arestas com um vértice de grau 4 é igual a $3r + r/2$ ou $(1 + 7r)/2$, isto é, tem exatamente $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ arestas com ambos os vértices com grau 4 e $3r$ ou $3r + 1$ arestas com um único vértice de grau 4. De modo que e_3 (H') é min e_3 entre todos os grafos com n vértices e m arestas. Naturalmente este também é o valor mínimo entre todos os grafos *max* λ (λ=3). Como $n - r = min\ m_{\lambda}$, se $G(n, m)$ é um grafo *max* λ , então se pode dizer que $min\ m_{\lambda+1}(G) = m_{\lambda+1}(H') = (m - 4)\ min\ m_{\lambda} + n + min\ e_3$ ($\lambda = 3$). ■

Para $n \geq 13$ e $\lambda = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor = 3$, foi mostrado que é possível construir uma família de grafos pertencentes a $G_{\lambda, m_{\lambda+1}}(n, m)$. Wang e Zhang [75] apresentam uma lista completa de grafos pertencentes a $G_{\lambda, m_{\lambda+1}}(n, m)$, para cada $4 \leq n \leq 12$. Como exemplo, é apresentado na Figura 6.9 grafos G *max* λ & *min* $m_{\lambda+1}$ para $6 \leq n \leq 8$. Para cada grafo é apresentado o valor de m_4 . Estes grafos foram obtidos a partir da inserção adequada de arestas em um grafo *max* λ & *min* m_{λ} , exceto quando $n = 6$ e $m = 11$. Veja que esses grafos não possuem cortes quase independente de aresta.

Os grafos da Figura 6.9 possuem $6 \leq n \leq 8$ e $11 \leq m \leq 14$ com os seguintes valores para $m_4(G_a) = 45$, $m_4(G_b) = 33$, $m_4(G_c) = 20$, $m_4(G_d) = 57$, $m_4(G_e) = 41$, $m_4(G_f) = 25$, $m_4(G_g) = 86$, $m_4(G_h) = 68$, $m_4(G_i) = 49$.



(G_a) (G_b) (G_c)

(G_d) (G_e) (G_f)

(G_g) (G_h) (G_i)

Figura 6.9: Exemplos de grafos pertencentes a $G_{\lambda\ ,m_{\lambda+1}}(n,m)$ para $6 \leq n \leq 8$ e $11 \leq m \leq 14$

Conclusões Finais

Finalmente, chegamos ao último capítulo que está dividido em duas partes: na primeira, as principais contribuições desta dissertação são apresentadas e, na segunda, são propostas possíveis linhas de pesquisa para futuras dissertações.

A maior contribuição desta tese reside no fato em que ela disponibiliza, num só documento, estudos e resultados sobre grafos com máxima confiabilidade capazes de modelar redes com a segurança desejada dispersos em vários artigos da literatura. Além disso, podemos destacar algumas contribuições mais simples que, com certo grau de originalidade, desenvolvemos e apresentamos aqui. Dentre elas, apresentamos uma comparação entre os procedimentos de construção dos grafos de Harary e Hakimi que, como vimos, são grafos confiáveis para a modelagem de redes. A comparação feita é dada no segundo capítulo. Uma prova mais didática que a apresentada em Bauer *et al.* [9] foi desenvolvida tanto para o Teorema 4.1.1, quanto para a Proposição 4.2.1. O Algoritmo 4.3.1 que sintetiza a construção de grafos *max* λ & *min* m_λ, quando $\lambda = 3$, é mais uma contribuição original dada nesta dissertação. Finalmente, a Definição 5.1.1, feita a partir dos conceitos de subdivisão de aresta e de grafo subdivisão, nos permitiu uma formalização do conceito de grafos purificados ainda não disponível até agora.

Durante a pesquisa bibliográfica para o desenvolvimento desta dissertação, vimos que é possível construir grafos capazes de modelar redes confiáveis, baseado no conceito de conectividade restrita de arestas. Infelizmente, não pudemos incluir um estudo deste novo parâmetro para a conexidade de grafos. Entre os principais trabalhos que envolvem este assunto, destacamos o de Li e Li [47] onde, quando $i = \lambda, \lambda + 1, \ldots, 2\lambda + 1$, os valores de $m_i(G)$ para grafos circulantes foram calculados e o artigo de Deng *et al.* [27], onde foram ampliados os resultados de Li e Li [47], provando que, para $i = \lambda,$

$\lambda + 1, ..., 2\lambda - 2$, os grafos de Harary dos tipos $H_1(q)$ e $H_2(q)$ são *max* λ *& min* m_i. Além destes, há uma série de outros que tratam da conectividade restrita de arestas, como ([22], [52], [56], [57], [58] e [59]). Assim, como proposta de trabalhos futuros, sugerimos reunir, em um único documento, os resultados da literatura sobre grafos que modelam redes cofiáveis sob esta nova ótica. Finalmente, nesta dissertação estudamos os grafos *max* λ *& min* $m_{\lambda+1}$, para $\lambda \geq 3$. Desta forma, ainda permanece em aberto, a caracterização de grafos para o caso $\lambda = 2$. Buscar um resultado desta natureza é outra indicação interessante a ser pesquisada.

Referências bibliográficas

[1] AMARAL, L.A.N., SCALA, A., BARTHÉLÉMY, M., STANLEY, H.E., “Classes of Small-world”, *Networks, Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, v. 97 , pp 11.149 - 11.152, 2000.

[2] AMIN, A.T., HAKIMI, S.L., “Graphs with Given Connectivity and Independence Number or Networks with Given Measures of Vulnerability and Survivability”, *IEEE Trans. On Circuit Theory*, v. CT-20, 1973.

[3] ATH, Y., SOBEL, M., “Some conjectured uniformly optimal reliable networks”, *Probability in the engineering and informational sciences*, v. 14, pp. 375-383, 2000.

[4] ATH, Y., SOBEL, M., “Counterexamples to conjectures for uniformly optimally reliable graphs”, *Probability in the engineering and informational sciences*, v. 14, pp. 173-177, 2000.

[5] BAGGA, K.S, BEINEKE, L.W., PIPPERT, R.E ET AL., “A classification scheme for vulnerability and reliability parameters of graphs”, *Mathl. Comput. Modeling*, v.17, n.11. pp. 13-16, 1993.

[6] BALL, M., PROVAN, J., "The complexity of counting cuts and computing the probability that a graph is connected", *SIAM J. Comput.*, v. 12, pp. 777-788, 1983.

[7] BALL, M., PROVAN, J., "Calculating bounds on reach ability and connectedness in stochastic networks", *Networks*, v. 13, pp. 253-278, 1983.

[8] BALLOBÁS, B., *Extremal Graph Theory*, New York, Dover Publications Inc.,2004.

[9] BAUER, D., BOESCH, F., SUFFEL, C., "Combinatorial optimization problems in the analysis and design of probabilistic networks", *Networks*, v.15, pp. 257-271, 1985.

[10] BAUER, D., BOESCH, F., SUFFEL, C., "On the validity of a reduction of reliable network design to a graph extremal problem", *IEEE Transactions on circuits and systems*, v.34, pp. 1579-1581, 1987.

[11] BAREFOOT, C. A.; ENTRINGER, R.; SWART, H., "Vulnerability in graphs – a comparative survey", *J. Combin. Math. Combin. Comput*., v. 1, pp. 13-22, 1987.

[12] BERMOND, C., HOMOBONO N., PEYRAT, C., "Large fault tolerant interconnection networks graph and combinatorics", *Graph and combinatorics,* v.5, pp. 107-123, 1989.

[13] BIGGS, N. *Algebraic Graph Theory*, Cambridge, 1993.

[14] BOAVENTURA NETTO, P.O., *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*, 3.ed, São Paulo, Editora Edgard Blucher, 2003.

[15] BOESCH, F., Li, X., SUFFEL, C., "On the existence of uniformly optimally reliable networks ", *Networks*, v.21, pp. 181-194, 1991.

[16] BOESCH, F., "An overview of graph theory applications to network reliability vulnerability", *Graph Theory Notes NY*, v. 13, pp. 29-37, 1989.

[17] BOESCH, F., "On unreliability polynomials and graph connectivity in reliable network synthesis ", *Journal Graphy Theory*, v. 10, pp. 339-352, 1986.

[18] BOESCH, F., "Synthesis of reliable networks - A survey", *IEEE Trans. Reliable*, v. 35, pp.240–246, 1986.

[19] BOESCH, F., WANG, J., "Reliable circulants networks with minimum transmission delay", *IEEE Trans.on circuits and systems,* pp. 1286-1291, 1985.

[20] BOESCH, F., TINDELL, R., "Circulants and their connectivities", *Journal Graphy Theory*, v. 8, pp. 487-499, 1984.

[21] BONDY, J.A., MURTY, U.S.R., *Graph Theory with Applications*, New York, Elsevier North Holland, Inc., 1980.

[22] BONSMA, P., UEFFING, L., N., “Edge-cuts leaving components of order at least three”, *Discrete Math*., v.256, v. 431–439, 2002.

[23] COLBOURN, CHARLES J., “ General topological network design ”, *Annals of operations research,* v. 33, pp 3-15, 1991.

[24] COLBOURN, CHARLES J., “The Combinatorics of Network Reliability”, *Oxford University Press*, New York, NY, 1987.

[25] COLBOURN, C.J, HARMS, D.,D., “Bounding all-terminal reliability in computer networks,” *Computer Communications Networks Group*, Univ. Waterloo, Tech. Rep. E-123, 1985.

[26] CHOI, M., KRISHNA, C.M., "On measures of vulnerability of interconnection networks", *Microelectron. Reliab.*, v. 29, n. 6, pp. 1011-1020, 1989.

[27] DENG, H., CHEN, J., LI, R., et al., "On the construction of most reliable networks", *Discrete Applied Mathematics*, v. 140, pp. 19-33, 2004.

[28] DIESTEL, R., *Graph Theory*, New York, Springer, Verlag, 1997.

[29] DOTY, L.L., "Extremal connectivity and vulnerability in graphs", *Networks*, pp. 73-78, v. 19, 1983.

[30] ESFAHANIAN, A., HAKIMI, S., "On computing a conditional edge connectivity of a graph", *Inform. Process. Lett.*, v. 27, pp. 195-199, 1988.

[31] EXOO, G., HARARY, F., XU, C., "Vulnerability in graphs of diameter four", *Mathl. Comput. Modelling* v. 17, n. 11, pp. 65-68, 1993.

[32] FALLAT, S., KIRKLAND, S., MOLITIERNO, J., et al., "On graphs whose laplacian matrices have distinct integer eigenvalues", *Journal of Graph Theory* to appear.

[33] GODDARD, W., “*On the Vulnerability of Graphs*”, Ph.D. thesis, University of Natal, Durban, S.A., 1989.

[34] GOMEZ, J., PELAYO, I., BALBUENA, C., "Diameter vulnerability of GC graphs", *Discrete Applied Mathematics*, v. 130, pp. 395-416, 2003.

[35] GROSS, D., SACCOMAN, J.T, “Uniformly optimally reliable graphs”, *Networks*, v. 31, pp 217-225, 1997.

[36] GROSS, J., YELLEN, J., *Graph Theory and Its Applications*, 2 ed. Flórida, Boca Raton, EUA, CRC Press, 1999.

[37] GROSS, J., YELLEN, J., *Handbook of Graph Theory*, Boca Raton, Series of Discrete Mathematics and its applications, CRC Press, 2004.

[38] HAKIMI, S. L., "An Algorithm for construction of the least vulnerable communication network or the graph with the maximum connectivity", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, pp. 229-230, 1969.

[39] HAKIMI, S.L., AMIN, A.T., "On design of reliable networks", *Networks*, v.3, pp. 241-260, 1973.

[40] HARARY, F., *Graph Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1969.

[41] HARARY, F., “The maximum connectivity of a graph”, *Proc. Nat. Acad. Of Sci. USA*, v. 48, pp. 1142-1146, 1962.

[42] HENZINGER, M.R., RAO, S., GABOW, H.N., "A classication scheme for vulnerability and reliability parameters of graphs", *Mathl. Comput. Modelling*, v. 17, n. 11, pp. 13-16, 1993.

[43] HUI, K., “*Network Reliability Estimation*”, D.Sc Thesis, University of Adelaide, 2005.

[44] JUNMING, X., “On conditional edge-connectivity of graphs”, *Acta mathematicae applicatae sinica,* v. 16, pp. 414-419, 2000.

[45] KELMANS, A., “Connectivity of probabilistic networks’, *Automatic Telemekhania*, v. 3, pp.98-116, 1966.

[46] KOTSIS, G., 1992, *Interconnection topologies and outing for parallel processing systems*, In: Austrian center for parallel computation, Technical report, pp. 1-86.

[47] LI, Q., LI, Q., "Reliable analysis of circulant graphs", *Networks*, v. 31, pp.68-65, 1998.

[48] LIMA, L.S., Abreu, N. M. M, C. S & Aguieiras, M. A. F. de, “Laplacian integral graphs in S(a, b)”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 423, pp. 136-145, 2007.

[49] LIMA, L.S., “*Vulnerabilidade de redes em grafos de Harary*”, D. Sc, COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, 2006.

[50] MACWAN, A., HANNER, R., MUTHA, K., K., “Reliability and communications networks”, *Networks*, v.11, pp. 1-6, 2006.

[51] MENG, J., “Connectivity of vertex and edge transitive graphs”, *Discrete applied mathematics*, v.127, pp. 601-613, 2003.

[52] MENG, J., Y. JI, “On a kind of restricted edge connectivity of graphs”, *Discrete Appl. Math*, v. 243, pp. 291–298, 2002.

[53] MYRVOLD, W., CHEUNG, H., “Uniformly-Most Reliable do not always exist”, *Networks*, v.21, pp. 417-419, 1991.

[54] MYRVOLD, W., “Network Synthesis: Some Recent Developments”, *Graphy Theory, combinatorics, algorithms and applications*, pp. 1-10, 1996.

[55] OLIVEIRA, C.S., “*Laplaciano de Grafos e Vulnerabilidade de Redes*”, D.Sc, COPPE/UFRJ, 2003.

[56] OU, J., “Edge cuts leaving components of order at least m”, *Discrete Mathematics*, v.305, pp. 365-371, 2005.

[57] OU, J., “3-restricted edge cut of graphs”, *Southeast Asian Bull.* v. 29, 2005.

[58] OU, J. “On 4-restricted edge cut of graphs”, *Austral. J. Combinatorics* , v.30, pp. 103-112, 2004.

[59] OU, J., "*Restricted edge connectivity and network reliability*", Ph.D. Thesis, Department of Mathematics", Xiamen University, 2003.

[60] PAN, S., N., SPRAGINS, J., "Dependent failure reliability models for tactical communications networks", *Proc. Int. Conf. Communications*, pp. 765–771, 1983.

[61] PETINGI, L., "*On the characterization of graphs with maximum number of spanning trees*", PhD Thesis, Stevens Institute of techonology, Hoboken, N.J., 1991

[62] PETINGI, L., BOESCH, F., SUFFEL, C., "On the characterization of graphs with maximum number of spanning trees ", *Networks*, v. 179 (1-3), pp. 185-203, 1998.

[63] PETINGI, L., SACCOMAN, J.T., " Uniformly least reliable graphs", *Networks*, v. 25, pp. 125-131, 1995.

[64] PEYRAT, C., "Diameter vulnerability of graphs", *Discrete Applied Mathematics*, v. 9, pp. 245-250, 1984.

[65] RAUTENBACH, D., VOLKMANN, L., "On the existence of edge cuts leaving several large components", *Technische Universität Ilmenau, Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften*, 2007.

[66] REIS NETO, B.M., "*Um survey sobre parâmetros de vulnerabilidade em redes*", M.Sc., COPPE,UFRJ, Rio de Janeiro, 2005.

[67] RODRIGUEZ, J., PETENGI, L., "Graph with maximum number of spanning trees and optimally reliable graphs", *Combinatorial optimization: Theory and practice*, v. 1, pp. 57-68, 1996.

[68] SATYANARAYANA, SCHOPPMANN, L., SUFFEL, C., "A reliability improving graph transformation with applications to network reliability ", *Networks*, v. 22, pp 209-216, 1992.

[69] SAWIONEK, B., WOJCIECHOWSKI, J., ARABAS, J., “Synthesis of reliable networks in the presence of line failures”, *International symposium on circuits and systems,* pp. 649-652, 2000.

[70] SHPUNGIN, Y., “Combinatorial Approach to Reliability Evaluation of Network with Unreliable Nodes and Unreliable Edges”, *Proceedings of world academy of science, engineering and technology*, v.12, 2006.

[71] SMITH, D., “Optimally reliable networks”, *Annals of Operation Research*, v. 33, pp. 107-112, 1991.

[72] SMITH, D., "Graphs with the smallest number of minimum cut sets", *Networks*, v. 14, pp. 47-61, 1984.

[73] VAN SLYKE, R.,M., FRANK H., “Network reliability analysis”, *Networks*, v. 1, pp. 279-290, 1972.

[74] XU, L., LÜ, M., “Super connectivity of line graphs”, *Inform. Process. Letters*, v. 95, pp. 191-195, 2005.

[75] WANG, G., ZHANG, L., "The structure of $max\ \lambda$ - $min\ m_{\lambda+1}$ graphs used in the design of reliable networks", *Networks*, v. 30, pp. 231-242, 1997.

[76] WANG, G., “A proof of Boesch’s Conjecture”, *Networks*, v. 24, pp. 277-284, 1994.

[77] WANG, G., YANG, C.,S., “On the number of spanning trees in circulant graphs”, *International Journal of computer mathematics*”, v. 16, pp. 229-241, 1984.

[78] WEICHENBERG, G., E., CHAN, V., S., “High-Reliability Architectures for Networks under Stress ”, *IEEE journal on selected areas in communications,* v. 22, pp.1830-1845, 2004.

[79] WEICHENBERG, G., E., “*High-Reliability Architectures for Networks under Stress* ”, M.Sc Thesis, University of Toronto, 2001.

[80] R. S. WILKOV., R. S., “Reliability considerations in computer network design”, *Proc. Int.Fed. Inform. Process. Congr.*, 1971.

[81] R. S. WILKOV., R. S, “Design of computer networks based on a new reliability measure”, In *Proceedings of Symposium Computer-Communications Networks and Teletraffic*, Brooklyn, 1972.

[82] R. S. WILKOV., R. S. “On the design of maximally reliable communication networks”, In *Proceedings of Princeton Conference on Information Sciences and Systems*, Princeton, 1972.